**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016»,
25–27 травня 2016 р., Львів**

УДК 517.53.57

МЕТОД КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ В ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧАХ ДИФУЗІЇ

Галина Івасик , Йосиф Желізняк

Національний університет «Львівська політехніка»,
Ivasyk-G@yandex.ua, Zhelizniak_yosyf@ukr.net

Розглядаємо плоску задачу про дифузію речовини у безмежному середовищі за наявності в ньому циліндричного тіла. Динамічний стан середовища створюється об'ємними джерелами. Рівняння задачі формулюємо в будь-якій площині, перпендикулярній до твірної циліндра. Нехай $w=\varphi(z)$ – однолисте конформне відображення області $\bar{D}$ на круг $\bar{K}$, а $z=h(w)$ – обернене до нього відображення. При цьому крива ∂D відображається на коло ∂K .

Рівняння дифузії [1] запишемо в прямокутній системі координат з використанням комплексних змінних $w=u+iv$, $\bar{w}=u-iv$ у вигляді $\partial_t^1 U = 4a^2 \partial_{w\bar{w}}^2 U - f$, де u, v і t – лінійні та часова координати; $U=U(w,\bar{w},t)$, $f=f(w,\bar{w},t)$ – дійсні функції.

Перейдемо до нових змінних $z=h(w)$, $\bar{z}=\overline{h(w)}$. Тоді одержимо таке рівняння:

$$\partial_t^1 U = 4a^2 \left|\varphi'(z)\right|^{-2} \partial_{z\bar{z}}^2 U - f .$$

Розв'язок цього рівняння в $\bar{D}$ за однорідних початкових умов (що не є принциповим) і граничної умови $U|_{z\in L}=0$ шукаємо [2] у вигляді суми ряду за системою функцій $\left\{\Phi_{m,k(m)}(z,\bar{z})\right\}_{k=1}^{\infty}$ $(m=0,\pm1,\ldots)$, де $\Phi_{-m,k(m)}(z,\bar{z}) = \Phi_{m,k(m)}(\bar{z},z)$; $\Phi_{m,k(m)}(z,\bar{z}) = J_m\left(\lambda_{k(m)}\varphi(z), \lambda_{k(m)}\overline{\varphi(z)}\right)$; $J_m(w,\bar{w}) = w|w|^{-1} J_m(|w|)$; $J_m(w,w)=J_m(w)$ – функції Бесселя першого роду m-го порядку; $\lambda_{k(m)}$ $(k=1,2,\ldots)$ – додатні корені рівняння $J_m(\lambda)=0$. Введені величини є власними функціями і власними числами такої крайової задачі: $4\left|\varphi'(z)\right|^{-2} \partial_{z\bar{z}}^2 U + \lambda^2 u = 0$, $U|_{z\in\partial D}=0$.

Отже, якщо функція $f(w, \bar{w}, t)$ зображується збіжним рядом

$$f(z, \bar{z}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{m,k}(t) \Phi_{m,k(m)}(z, \bar{z}),$$

де $f_{m,k}(t) = \left\| J_{m,k(m)} \right\|^2 \iint\limits_D f(z, \bar{z}, t) \Phi_{m,k(m)}(\bar{z}, z) |\varphi'(z)| dxdy$, то узагальнений (відносно множини функцій, що розвиваються у слабко збіжні ряди за даною системою) розв'язок задачі [1] шукаємо операційним методом, і він матиме вигляд:

$$U(z, \bar{z}, t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_{m,k(m)}(z, \bar{z}) \int_0^t e^{-a^2 \lambda_{k(m)}^2 (t-\tau)} f_{m,k}(\tau) d\tau.$$

Одержаний розв'язок задовольняє сформульованій граничній умові, оскільки

$$J_m\left(\lambda_{k(m)} |\varphi(z)|, \lambda_{k(m)} \overline{|\varphi(z)|}\right)\Big|_{z \in \partial D} = J_m\left(\lambda_{k(m)} |w|, \lambda_{k(m)} |\bar{w}|\right)\Big|_{w \in \partial K} =$$

$$= J_m\left(\lambda_{k(m)}\right) = 0.$$

Розв'язок проілюстровано відображеннями: $w = z + \sqrt{z^2 - c}$ і $w = \left(1/\sqrt{2}\right) \times \times \left(\sqrt{z^2 + c} + \sqrt{z^2 - c}\right)$, що відповідають площині з еліптичним або хрестоподібним включенням.

1. *Владимиров И. С.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, – 1981. – 512 с.
2. *Sukhorolsky M. A.* Solution of Helmholtz's equation in the plane with an elliptical hole // Mathematical modeling and computing. – 2014. – V. 1. – N 2. – P. 256 – 283.

METHOD OF CONFORMING MAPPINGS IN DYNAMIC DIFFUSION PROBLEM

The plane problem of the diffusion of substances in the environment for the vast presence of a cylindrical body is considered. The dynamic state of the environment is created with voluminous sources. Equation of the problem we formulate in any plane which is perpendicular to the generating of the cylinder.