Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016», 25–27 травня 2016 р., Львів

УДК 539.3

ДОВГА ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА ІЗ НИЗЬКОЮ ЗСУВНОЮ ЖОРСТКІСТЮ У ЗМІННОМУ ТЕМПЕРАТУРНОМУ ПОЛІ

НАДІЯ ГАНУЛІЧ

Інститут прикладних проблеми механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Здійснено розрахунок довгої циліндричної, піддатливої на зсув оболонки радіуса R з товщиною стінки $2h$, яка зазнає дії осесиметрично розподілених джерел тепла у часовому режимі функції Хевісайда. За моделлю С. П. Тимошенка побудовано розв'язки квазістатичної задачі термопружності. Досліджено стан оболонки в асимптотичному режимі нагрівання, за якого розрахункові величини – температура $T(x,\tau)$, прогини $W(x,\tau)$ та відповідні їм зусилля і моменти досягають найвищих рівнів.

Задача зводиться до розв'язання відомого [1] рівняння теплопровідності

$$\partial^2 T / \partial x^2 - \partial T / \partial \tau - \beta^2 T(x,\tau) = -R^2 \alpha_t^{-1} Q(x,\tau) \qquad (1)$$

з наступним розглядом рівняння згину серединної поверхні оболонки

$$d^4 W / dx^4 - 2g^2 \left(d^2 W / dx^2 \right) + 4k^4 W = 4k^4 \beta_t R \left(T - \varepsilon R^{-2} \left(d^2 T / dx^2 \right) \right), \qquad (2)$$

де $x = \xi / R$, $\tau = t / (\alpha R^2)$, $\beta^2 = \kappa R^2 / (\alpha_t h)$, $2g^2 = 1{,}2E / G$, $\varepsilon = g^2 / (2k^4)$, $4k^4 = 3(1-\nu^2)(R/h)^2$, причому $\xi \in [0,\infty)$ – осьова координата, $t \in [0,\infty)$ – реальний час, $\alpha = C_v \rho / \alpha_t$, C_v – питома теплоємність, ρ – густина матеріалу, α_t, κ, ν – коефіцієнти теплопровідності, тепловіддачі і Пуассона відповідно.

За розподілу джерел $Q(x,\tau)$ у кільці шириною $2a$, умов парності функцій $T(x,\tau)$, $W(x,\tau)$ і їх відсутності на нескінченності, методом інтегральних перетворень отримано [3] розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$T(x,\tau) = \frac{q_0}{4\beta^2 \beta_t} \left[4 \left\{ \begin{matrix} 1 - f_0(x) - e^{-\beta^2 \tau} \\ \varphi_0(x) \end{matrix} \right\} + 2e^{-\beta^2 \tau} \left(erfcx_1 \pm erfcx_2 \right) - \right.$$
$$\left. - e^{\beta(x+a)} erfcx_1^* + e^{-\beta(x+a)} erfcx_2^* \mp e^{\beta|x-a|} erfcx_3^* \pm e^{-\beta|x-a|} erfcx_4^* \right], \qquad (3)$$

де верхній рядок відноситься до $x \in [0,a]$, нижній – до $x \in [a,\infty)$, причому $q_0 = \beta_t R^2 Q_0 / \alpha_t$, $f_0(x) = e^{-\beta a} ch(\beta x)$, $\varphi_0(x) = -sh(\beta a) e^{-\beta x}$, $erfc(y) = 1 - \Phi(y)$,

$\Phi(y)$ – інтеграл ймовірностей, $x_1 = (x+a)/(2\sqrt{\tau})$, $x_2 = \ = |x-a|/(2\sqrt{\tau})$, $x^*_{1,2,3,4} = \beta\sqrt{\tau} \pm x_{1,2}$ та побудовано розв'язок рівняння (2)

$$W(x,\tau) = \frac{8k^4 R q_0}{\pi\beta^2} \int_0^\infty \frac{(1+\varepsilon s^2)\left(1-\exp(-(s^2+\beta^2)\tau\right)}{s(s^2+\beta^2)(s^4+2g^2 s^2+4k^4)} \sin(as)\cos(xs)ds \,. \quad (4)$$

Очевидно, що $\partial W/\partial\tau > 0$, отже максимальні рівні $W(x,\tau)$ досягаються при $\tau \to \infty$, і після розкладу підінтегрального дробу та реалізації ряду інтегралів функції прогинів, залежно від відношення $g/(\sqrt{2}k)$, такі:

$$W(x) = q_0^* \left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{2(\beta^2 g^2 - 2k^4)}{\mu} \begin{Bmatrix} f_0(x) \\ -\varphi_0(x) \end{Bmatrix} - \frac{4\beta^2 k^4}{\mu c^2} \begin{Bmatrix} f_1(x) \\ f_3(x) \end{Bmatrix} + \frac{\beta^4}{\mu} \begin{Bmatrix} -f_2(x) \\ f_4(x) \end{Bmatrix} \right],$$

$$W(x) = q_0^* \left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{4k^2(k^2-\beta^2)}{\gamma^4} \begin{Bmatrix} f_0(x) \\ -\varphi_0(x) \end{Bmatrix} - \frac{2\beta^2}{\gamma^2} \begin{Bmatrix} \psi_1(x) \\ -\psi_3(x) \end{Bmatrix} - \frac{\sqrt{2}\beta^2 k}{2\gamma^2} \begin{Bmatrix} \psi_2(x) \\ \psi_4(x) \end{Bmatrix} \right],$$

$$W(x) = q_0^* \left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} - 2\frac{2k^2 - \beta^2 g^2}{\mu} \begin{Bmatrix} f_0(x) \\ -\varphi_0(x) \end{Bmatrix} - \frac{\beta^2}{2\mu c^2} \sum_{j=1}^{2} (-1)^j a_j \begin{Bmatrix} \varphi_{1j}(x) \\ \varphi_{2j}(x) \end{Bmatrix} \right],$$

де $q_0^* = \beta^{-2} R q_0$, $\mu = 4k^4 - 2\beta^2 g^2 + \beta^4$, $\gamma^2 = 2k^2 - \beta^2$, $a_j = 4k^4 - (4g^2 - \beta^2) g_j^2$, $g_{1,2}^2 = g^2 \pm c^2$, $c^2 = \left|4k^4 - g^4\right|$, причому перша рівність має місце для $g < \sqrt{2}k$, друга – для $g = \sqrt{2}k$, третя – для $g > \sqrt{2}k$, а $f_j(x)$, $\psi_j(x)$, $\varphi_{ik}(x)$ – цілком визначені комбінації гіперболічних і тригонометричних функцій. Зазначимо, що отриманий розв'язок дає можливість вивчити вплив зсуву на міцність оболонки в умовах її нерівномірного нагрівання.

1. *Болотин В. В.* Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла // Прикл. мат. и мех. – 1960. – 24, № 2 – С. 361-363.
2. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наукова думка, 1973. – 248 с.
3. *Гануліч В. К., Максимук О. В., Гануліч Н. В.* Квазістатична задача термопружності для циліндричної оболонки із джерелами тепла і тепловіддачею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 1. – С. 154-161.

LONG CYLINDRICAL SHELL WITH THE LOW SHEAR RIGIDITY IN THE TIME-VARYING TEMPERATURE FIELD

Quasistatic problem of thermoelasticity for a long cylindrical shell with the circular distribution of heat sources and convective heat transfer from surface has been solved on the basis of the shear deformation model of the thin-walled elements of the structures. Thermoelastic state of the shell in asymptotic regime of heating under which design parameters attain maximal values was investigated for various ratios of the Young's modulus and shear modulus of the material.