Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016», 25–27 травня 2016 р., Львів

УДК 512.552.13

ЕЛЕМЕНТАРНА РЕДУКЦІЯ ІДЕМПОТЕНТНИХ МАТРИЦЬ

Андрій Саган, Оксана Фірман

Львівський національний університет імені Івана Франка,
andrijsagan@gmail.com, dancha.9503@gmail.com

Під кільцем розуміємо комутативне кільце з одиницею відмінною від нуля. Під елементарними матрицями, з елементами кільця R, розуміємо квадратні матриці таких типів: відмінні від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю; діагональні з оборотними елементами на головній діагоналі. Позначимо групу всіх елементарних матриць n-го порядку через $GE_n(R)$.

Кільце R називаємо *EID-кільцем* [1], якщо для довільної ідемпотентної матриці $A \in M_n(R)$ існують матриці $P_1, P_2, \ldots, P_k \in GE_n(R)$, що $P_1 \cdot P_2 \cdots P_k \cdot A \cdot (P_1 \cdot P_2 \cdots P_k)^{-1}$ є діагональною матрицею.

Нормою над кільцем R називають таке відображення $\varphi : R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, що 1) $\varphi(0) = 0$ тоді і лише тоді, коли $a = 0$; 2) $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$ для довільних таких елементів $a, b \in R$, що $ab \neq 0$.

Кільце R називається *ω-евклідовим кільцем* [2] стосовно норми φ, якщо для довільної пари елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$ існує такий правий m-членний ланцюг подільності для деякого натурального m, що $\varphi(r_m) < \varphi(b)$.

Кільце R називається *кільцем з елементарною редукцією матриць* [3], якщо довільна матриця A над кільцем R володіє елементарною редукцією, тобто існують такі елементарні над R матриці $P_1, \ldots, P_k$, $Q_1, \ldots, Q_s$ відповідних розмірів, що

$$P_1 \cdots P_k \cdot A \cdot Q_1 \cdots Q_s = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0),$$

де $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq R\varepsilon_i \cap \varepsilon_i R$ для $i = (1, 2, \ldots, r-1)$. Всі інші необхідні означення можна знайти в роботах [1, 2, 4].

Теорема . *Кільце з елементарною редукцією матриць є EID-кільцем.*

Теорема 2. *Нехай R є ω-евклідовим кільцем без дільників нуля, тоді R є EID-кільцем.*

Теорема 3. *Комутативне ω-евклідове кільце без дільників нуля є кільцем з елементарною редукцією матриць тоді і тільки тоді, коли для кожного ідеалу* I *, кільце* R/I *є EID-кільцем.*

1. *Zabavskii B. V., Romaniv O. M.* Rings with elementary reduction of matrices // Ukr. mat. journal. – 2000. – **52**, № 12. – P. 1641–1649.
2. *Steger A.* Diagonability of idempotent matrices // Pacific J. Math. – 1966. – **35**. – P. 31–36.
3. *Zabavsky B.V.* Rings with elementary reduction matrix // Ring Theory Conf. – 1996. – P. 15–20.
4. *Bougaut B.* Anneaux Quasi-Eclideans // These de Docteur Troisieme Cycle (1976).

ELEMENTARY REDUCTION OF IDEMPOTENT MATRICES

We study rings with elementary reduction of idempotent matrices and ω-euclidean rings.