**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016»,
25–27 травня 2016 р., Львів**

УДК 517.956.3

INVERSE PROBLEM FOR AN AGE-STRUCTURED MODEL OF A HARVESTED FISH POPULATION

Ruslan Andrusyak

Ivan Franko National University of Lviv, ru.andrusyak@gmail.com

Let $u(x,t)$ be the unknown density of a population at time t with respect to an age variable x, so that the population at time t between ages x_1 and x_2 is $\int\limits_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx$. Consider a general model of age-structured population dynamics with logistic-type nonlinearity (e.g., a model of fish population growth) given by

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=-\left(m(x)+n\left(\int\limits_0^{+\infty} u(x,t)dx\right)\right)u(x,t), \quad x>0,\ t>0; \qquad (1)$$

$$u(0,t)=b(t)\int\limits_0^{+\infty} h(x)u(x,t)dx, \quad t\ge 0; \qquad u(x,0)=u_0(x), \quad x\ge 0; \qquad (2)$$

where $\int\limits_0^{+\infty} u(x,t)dx$ is the total population, $m(x)$ is the age-specific death rate, $b(t)$ is the fecundity rate at time t (i.e., the average number of offspring per female per unit time), $h(x)$ is the age-specific relative fecundity, and $u_0(x)$ is the known initial age distribution. The logistic term $n\left(\int\limits_0^{+\infty} u(x,t)dx\right)$ provides a mechanism for increased mortality as the population increases, which may be explained by intra-species competition for resources.

We wish to study the effect on a population model of the removal of members of the population at a specified rate. If a population modeled by the initial-boundary value problem (1), (2) is subject to a harvest at a rate of $E(t)\int\limits_0^{+\infty} u(x,t)dx$ members per unit time then the harvested population is modeled by the PDE

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=-\left(m(x)+n\left(\int_0^{+\infty}u(x,t)dx\right)+E(t)\right)u(x,t),\quad x>0,\ t>0.\quad (3)$$

This type of harvesting arises in the modeling of fisheries, where it is often assumed that the number of fish caught per unit time is proportional to $E(t)$, the effort expended in fishing. This fishing effort may be measured, for example, by the number of boats fishing at a given time.

In an inverse problem (a parameter identification problem) we seek both the density of fish population and the effort expended in fishing, in order to ensure the desired total population dynamics. In other words, the aim is to determine both a solution $u(x,t)$ and an unknown function $E(t)$ satisfying the additional integral relation

$$\int_0^{+\infty}u(x,t)dx=p(t),\quad (4)$$

along with the PDE (3) and conditions (2).

Applying the method of characteristics and the Banach fixed-point theorem, it can be proved that there is a unique solution to the inverse problem (2)-(4).

1. *David Logan J.* An introduction to nonlinear partial differential equations. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2008. – 397 p.
2. *Brauer F., Castillo-Chavez C.* Mathematical models in population biology and epidemiology, Texts in applied mathematics, Volume 40. – New York: Springer, 2012. – 508 p.

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ВІКОВОГО СКЛАДУ ПОПУЛЯЦІЇ РИБ, ЩО ВІДЛОВЛЮЄТЬСЯ

Розглянуто математичну модель, що описує динаміку біологічної популяції (напр., популяції риб), що враховує віковий розподіл особин. Сформульовано обернену задачу ідентифікації невідомого коефіцієнта в рівнянні, що визначає швидкість вилучення особин із популяції (напр., кількість човнів, що використовуються в рибальстві), доповнивши модель інтегральною умовою перевизначення, що описує бажану динаміку загальної чисельності популяції. Застосовуючи метод характеристик і теорему Банаха про нерухому точку, доведено існування єдиного розв'язку оберненої задачі.