**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016»,
25–27 травня 2016 р., Львів**

УДК 539.3

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ З ВІЛЬНОЮ АБО ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЮ МЕЖЕЮ ЗА ТЕПЛОВИДІЛЕННЯ НА НІЙ У КРУГОВІЙ ОБЛАСТІ

Роман Андрійчук

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, andriychukroman@gmail.com

Доповідь присвячена дослідженню осесиметричного термонапруженого стану півпростору з теплоізольованою вільною або жорстко закріпленою межею за тепловиділення на ній у круговій області S радіуса *a*. У циліндричній системі координат з початком у центрі області S температурне поле записуємо у вигляді

$$T(r,z)=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty W(\eta)e^{-\eta|z|}J_0(\eta r)\,d\eta\,, \tag{1}$$

$$W(\eta)=\int_0^a \rho w(\rho)\,J_0(\eta\rho)\,d\rho\,,$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, $w(\rho)$ – густина джерел тепла, $J_0(u)$ – функція Бесселя.

При $z = 0$ граничні умови мають вигляд:

а) для жорстко закріпленої межі

$$u_r(r,0)=0\,,\ u_z(r,0)=0\,; \tag{2}$$

б) для вільної межі

$$\sigma_{zz}(r,0)=0,\ \sigma_{rz}(r,0)=0\,. \tag{3}$$

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді

$$u(r,z)=\bar{u}(r,z)+\bar{\bar{u}}(r,z),\qquad \sigma(r,z)=\bar{\sigma}(r,z)+\bar{\bar{\sigma}}(r,z)\,,$$

де перші доданки характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, а другі – переміщення і напруження у півпросторі, які забезпечують виконання умов (2)-(3). Переміщення і напруження у безмежному тілі визначаються через термопружний потенціал переміщень

$$\Phi(r,z)=-A\int_0^\infty W(\eta)\eta^{-2}e^{-\eta|z|}\left(1+\eta|z|\right)J_0(\eta,r)\,d\eta\,,\quad A=\frac{\alpha_t}{2\lambda}\frac{1+\nu}{1-\nu}\,. \tag{4}$$

Тут α_t і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона. Зокрема,

$$\bar{u}_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \bar{u}_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \bar{\sigma}_{zz} = -2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Phi, \quad \bar{\sigma}_{rz} = 2G\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}. \qquad (5)$$

Для визначення переміщень $\bar{\bar{u}}(r,z)$ і напружень $\bar{\bar{\sigma}}(r,z)$ побудовано функцію Ґріна за допомогою бігармонічної функції Лява у півпросторі $z > 0$

$$L(r,z) = \int_0^\infty \left[C(\eta) + \eta z D(\eta)\right] e^{-\eta z} J_0(\eta r)\, d\eta, \qquad (6)$$

де $C(\eta)$ і $D(\eta)$ – шукані функції. Переміщення і напруження мають вигляд

$$\bar{\bar{u}}_r = -\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 L}{\partial r \partial z}, \qquad \bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right),$$

$$\bar{\bar{u}}_z = \frac{1}{1-2\nu}\left[2(1-\nu)\Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right], \quad \bar{\bar{\sigma}}_{rz} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left((1-\nu)\Delta L - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right). \qquad (7)$$

Розглянуто випадки, коли розподілені в області S площини $z = 0$ джерела тепла $w(r)$ описуються формулами

$$1)\ w(r) = w_0, \quad 2)\ w(r) = \frac{w_0 a}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad 3)\ w(r) = \frac{w_0}{a}\sqrt{a^2 - r^2}, \qquad (8)$$

причому поза областю S виконується: $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$. Тоді для жорстко закріпленої межі з (2) і (8) з використанням (4)-(7) одержимо: $C_i(\eta) = \; = -2(1-2\nu)D_i(\eta)$, $i = \overline{1,3}$; $D_1(\eta) = -\left[BJ_1(a\eta)\right]/\eta^4$, $D_2(\eta) = -\left[B\sin(a\eta)\right]/\left(2\eta^4\right)$, $D_3(\eta) = = -\left[B\sqrt{\pi a}J_{3/2}(a\eta)\right]/\left(2\sqrt{2}\eta^{9/2}\right)$, де $B = \left[m(1-2\nu)w_0 a\right]/\left[4\lambda(3-4\nu)\right]$. В площині $z = 0$ і на осі Oz при $r = 0$ наведено явні вирази для температури, переміщень і напружень. Побудовано графіки напружень.

AXISYMMETRIC THERMOSTRESSED STATE OF THE HALF-SPACE WITH FREE OR HARDLY CLAMPED BOUNDARY WITH HEAT RELEASE IN A CIRCULAR DOMAIN

Using the potential of thermoelastic displacements and Love biharmonic function, temperature, displacements and stresses in the semi-infinite body with heat release in a circular domain are determined. Insulated boundary of body is free or hardly clamped. The explicit expressions of temperature, displacements, stresses and plots of stresses in the plane z = 0 are presented.