**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015»,
26–28 травня 2015 р., Львів**

УДК 517.98

НЕПЕРЕРВНІСТЬ АЛГЕБРАЇЧНИХ ОПЕРАЦІЙ В ТОПОЛОГІЇ ГЕЛЬФАНДА, ЯКА ПОРОДЖЕНА АЛГЕБРОЮ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Андрій Загороднюк, Олена Тарас

Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника, elena_taras@ukr.net

Для довільного комплекснозначного банахового простору Z позначимо $H_b(Z)$ алгебру Фреше всіх цілих аналітичних функцій обмеженого типу (тобто на обмежених підмножинах) і через $H_u^r(Z)$ –- алгебру всіх r-рівномірно аналітичних функцій на Z. Очевидно, що $H_b(Z) \subset H_u^r(Z)$ і $H_u^r(Z)$ є топологічною алгеброю. Під H_b-топологією (H_u^r-топологією відповідно) ми розуміємо топологію Гельфанда на $H_b(Z)$ ($H_u^r(Z)$ відповідно) обмежену на Z.

Нехай X – комплекснозначний дійсний банаховий простір і $X_{\mathbb{C}}$ – його комплексифікація [2].

Теорема 1. *Якщо на просторі X (розмірність $\dim X = \infty$) існує розділяючий поліном P, тоді операція суми є розривною на $X_{\mathbb{C}}$ у H_b-топології [3].*

Нехай l_{2n} – банахова алгебра з поточковою операцією множення:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k e_k.,$$

де $\{e_k\}$ –- стандартний базис в $l_{2n}, n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Операція множення в комплексній банаховій алгебрі $l_{2n\mathbb{C}}$ не є неперевною в H_b-топології* [3].

На дійсних l_{2n} і L_{2n} існує розділяючий поліном виду $P(x) = \|x\|^2$ для всіх додатніх цілих чисел n [1]. Відомо, що якщо X – банаховий простір, який ізоморфний до c_0 або є його замкнутим підпростором, то розділяючого полінома на X не існує [2]. В такому випадку розглядають розділяючі аналітичні функцій.

Нехай X – дійсний сепарабельний банаховий простір. Дійсна функція d визначена на X називається рівномірно аналітичною і розділяючою, якщо:

1. d є дійсною аналітичною функцією на X з радіусом збіжності в будь-якій точці $x \in X$ більше або дорівнює деякому $R_d > 0$.
2. $\varnothing \neq \{x \in X : d(x) < \lambda \subset B_x\}$ для деякого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Розглянемо наступну аналітичну функцію для всіх $x \in c_0$, яка належить до $H_u^1(c_0)$:

$$d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n}^{n-1}.$$

Позначимо A_0 –- мінімальна алгебра Фреше яка містить $H_b(c_0)$ і $d(x)$. Очевидно, що $H_b(c_0) \subset A_0 \subset H_u^1(c_0)$.

Теорема 3. *Операція суми є розривною на* c_0 *в* A_0 *-топології* [3].

Аналогічний результат можна отримати, якщо c_0 – алгебра. Нехай функція $d(x)$, послідовність c_0 і алгебра A_0 визначені вище. Тоді $d\left(x_n \cdot \overline{x_n}\right) = d\left(e_{2n-1}\right) + d\left(e_{2n}\right) = 2$, що не прямує до 0.

Теорема 4. *Операція множення не є неперервною на* c_0 *в* A_0 *-топології* [3].

Залишається відкритим питання, чи є операції суми і добутку неперервними на c_0 в H_u^1-топології.

1. *Aron R. M., Cole B. J. Gamelin T. W.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. – 1991. – № 415. – C. 51– 93.
2. *Boiso M. C., Hajek P.* Analytic Approximations of Uniformly Continuous Functions in Real Banach Spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2001. – № 256. – C. 80 – 98.
3. *Taras O., Zagorodnyuk A.* On Continuity of Algebraic Operations in the Gelfand Topologies Generated by Algebras of Analytic Functions on Banach Spaces // International Journal of Mathematical Analysis HIKARI Ltd. –- 2015. – № 9 (22). – C. 1073- 1076.

ON CONTINUITY OF ALGEBRAIC OPERATIONS IN THE GELFAND TOPOLOGIES GENERATED BY ALGEBRAS OF ANALYTIC FUNCTIONS ON BANACH SPACES

The paper is devoted to study of continuity of the operation of sum (resp. multiplication) on Banach spaces (resp. algebras) in the Gelfand topology generated by some algebra of analytic functions.