Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015», 26–28 травня 2015 р., Львів

УДК 519.852

ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ ЯК МІРА ХАОСУ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ТИПУ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Зоряна Васюник, Юлія Максимів

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, z-vasjunyk@ukr.net, yulyya2609@i.ua

Для дослідження поведінки розв'язків дисипативної системи:

$$\tau_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = l^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - Q(\theta, \eta), \qquad \tau_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = L^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - P(\theta, \eta)\,, \tag{1}$$

актуальним є питання підходів до оцінки хаотичності розв'язків та їх класифікації. Тут τ_θ, τ_η, l, L – характерні часи та довжини системи відповідно; $Q(\theta,\eta)$, $P(\theta,\eta)$ – нелінійні джерела. З цією метою використано ідею фрактальної (хаусдорфової) розмірності

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \tag{2}$$

де $N(\varepsilon)$ – найменше число гіперкубів з ребром ε, необхідних для покриття множини точок в p-вимірному просторі [1, 2].

Безпосереднє обчислення хаусдорфової розмірності є проблематичним, оскільки необхідно знайти границю щодо всіх можливих розбиттів. Тому під час практичних обчислень використовують іншу метричну розмірність – ємність множини:

$$d_e = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_e(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}\,, \tag{3}$$

яка дає оцінку зверху для хаусдорфової розмірності, де N_e – мінімальне число кубів з ребром ε, необхідне для покриття множини.

Серед ймовірнісних розмірностей однією з найбільш практичних для обчислення є інформаційна розмірність d_i:

$$d_i = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=1}^{N_e(\varepsilon)} \frac{P_i \log(1/P_i)}{\log(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{N_i(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}\,. \tag{4}$$

Тут N_e – мінімальне число кубів з ребром ε, необхідне для покриття множини; P_i – ймовірність знайти точку в i-му кубі. Здебільшого $d_i \le d_e$.

Ще однією ймовірнісною розмірністю, доступною для обчислень, є кореляційна розмірність. Для її обчислення необхідно знайти відстані між всіма точками множини даних і визначити величину N_e, що дорівнює кількості відстаней $\rho(x_i, x_j)$, які менші від ε. Тоді $C(\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (N_e / N^2)$ є кореляційним інтегралом, а кореляційною розмірністю є число $d_c = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\ln C(\varepsilon) / \ln \varepsilon)$.

Розрахунки проводились для системи з кубічною нелінійністю:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = l^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \theta^2 - \eta + 1, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} = L^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \ x^2} - \eta(\eta - (\theta - A)^3) . \tag{5}$$

Розв'язок такої системи – це масив nxm точок, де n – розбиття по простору, m – по часу. Обчислення фрактальної розмірності всього масиву потребує великих затрат. Обчислення ж за кількома вибраними точками не дає задовільного результату. Тому попередньо проводили проектування розв'язків системи (5) за допомогою методу головних складових (*PCA*-проекцій) [2] на площину. Результати обчислень фрактальних розмірностей отриманих проекцій занесено в таблицю.

Таблиця 1. Метрична, інформаційна і кореляційна розмірності

Характер розв'язку	параметр A	d_e	d_i	d_c
Регулярні коливання	-0.05	1.0431	1.0723	1.0244
Квазіперіодичні коливання	-0.1	1.1703	1.2221	1.1363
Хаос	-0.3	1.8590	1.8590	1.9654

Як видно з таблиці, розмірність проекції розв'язків системи (5) для регулярних коливань з точністю до 0,01 дорівнює одиниці; для квазіперіодичного режиму – близька до одиниці, але суттєво не відрізняється; для хаотичного режиму маємо значення, які відповідають фрактальним множинам і вказують на наявність хаосу.

Отже, за значенням фрактальної розмірності проекцій розв'язків системи типу реакції-дифузії можна чітко визначити характер коливань в системі.

1. *Graussberger P., Procaccia I.* Measuring the Strangeness of Strange Attractors // Physica D. – 1983. – V. 9. – P. 189-208.
2. *Morrison D. F.* Multivariate Statistical Methods. – McGraf-Hill, 1981.

FRACTAL DIMENSION AS A MEASURE OF CHAOS OF REACTION-DIFFUSION SYSTEMS SOLUTIONS

We have calculated a fractal dimension of PCA-projection of solutions in order to classify the solutions of reaction-diffusion systems.