

ПРО КАНОНІЧНИЙ РОЗКЛАД ДЕЯКИХ ТОТОЖНОСТЕЙ ПАРАСТРОФНОЇ МЕДІАЛЬНОСТІ

Олена Тарковська

Хмельницький національний університет, e-mail: tark.olena@gmail.com

Групоїд $(Q; \cdot)$ називається *квазігрупою* [1], якщо для будь-яких елементів a і b з множини Q кожне з рівнянь $x \cdot a = b$ і $a \cdot y = b$ має єдиний розв'язок.

Для довільної перестановки σ із симетричної групи S_3 σ -*парастроф* [2] операції (\cdot) визначається так:

$$x_{1\sigma} \cdot x_{2\sigma} = x_{3\sigma} \quad :\Leftrightarrow \quad x_1 \cdot x_2 = x_3.$$

Груповим ізотопом [1] називається групоїд $(Q; \cdot)$, який ізотопний деякій групі. Для довільного елемента 0 із множини Q існує єдина четвірка $(+, \alpha, \beta, c)$ така, що праву частину формули

$$x \cdot y = \alpha x + c + \beta y$$

називають *канонічним розкладом*, якщо $(Q; +)$ – група, 0 – її нейтральний елемент, $\alpha(0) = \beta(0) = 0$ [3].

Тотожністю медіальності називається тотожність: $xu \cdot uv = xu \cdot uv$, а *тотожностями парастрофної медіальності* [2] називаються тотожності

$$\left(\begin{array}{c} \sigma_1 \\ x \cdot y \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \sigma_2 \\ u \cdot v \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \sigma_4 \\ x \cdot u \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \sigma_5 \\ y \cdot v \end{array} \right), \quad (1)$$

де $\sigma_i \in S_3$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Якщо в (1) принаймні п'ять операцій збігаються, то такі тотожності рівносильні точно п'яти тотожностям:

$$xu \cdot uv = xu \cdot uv. \quad (2)$$

$$xu \cdot uv = xu \cdot vu. \quad (3)$$

$$xu \cdot (u \cdot uv) = xu \cdot v. \quad (4)$$

$$(x \cdot u) \cdot vu = xv \cdot u. \quad (5)$$

$$xu \cdot (u \cdot vu) = xu \cdot v. \quad (6)$$

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015»,
26–28 травня 2015 р., Львів**

Необхідні та достатні умови для того, щоб квазігрупа $(Q; \cdot)$ задовольняла тотожність (2), вказано у відомій теоремі Брака-Тойоди [4]. Для тотожності (3) аналогічні умови знайдено А. Крапежем [5]. Умови для тотожності (4) знайдено автором [6], а саме:

Теорема 1. *Квазігрупа $(Q; \cdot)$ задовольняє тотожність (4) тоді і тільки тоді, коли існує комутативна група $(Q; +)$, її автоморфізм α , довільний елемент c такі, що*

$$x \cdot y = \alpha x + c - y.$$

Для двох інших тотожностей маємо:

Теорема 2. *Квазігрупа $(Q; \cdot)$ задовольняє тотожність (5) тоді і тільки тоді, коли існує комутативна група $(Q; +)$, її автоморфізм α , довільний елемент c такі, що*

$$x \cdot y = -x + c + \beta y.$$

Теорема 3. *Квазігрупа $(Q; \cdot)$ задовольняє тотожність (6) тоді і тільки тоді, коли існує комутативна група $(Q; +)$, її автоморфізм α , довільний елемент c такі, що*

$$x \cdot y = \alpha x + c + \alpha^{-1}y, \quad \alpha^3 = -1, \quad \alpha c = -c.$$

1. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. – М.: Наука, 1967. – 222 с.
2. Sokhatsky F. N. Symmetry in quasigroup and loop theory. 3rd Mile High Conference on Nonassociative Mathematics, Denver, Colorado, USA, August 11-17, 2013; <http://web.cs.du.edu/~petr/milehigh/2013/Sokhatsky.pdf>.
3. Сохацький Ф. М. Про ізотопи груп. II // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 12. – С. 1692-1703.
4. Bruck R. H. Some results in the theory of quasigroups. Trans. Amer. Math. Soc. – 1944 – Vol. 55. – P. 19-52.
5. Крапеж А. Quadratic level quasigroup equations with four variables I, Publ. Inst. Math. – Nouv. Sér. – 2007. – 81 (95) – P. 53-67.
6. Тарковська О. О. Про одну тотожність парастрофної медіальності // Міжнар. наук. конф. для молод. вчен. «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях»: матеріали конф. (Харків, 25-26 квітня 2015 р.).

**ABOUT CANONICAL DECOMPOSITION OF SOME
PARASTROPHICAL MEDIALITY IDENTITIES**

One can obtain a parastrophical mediality identity from the mediality identity by replacing all appearances of the operation symbol with some of its parastrophes. Parastrophical mediality identities with at least five coinciding parastrophes are considered and equivalency to five given nonequivalent identities is proved. Canonical decompositions of quasigroup operations satisfying these identities are found.

<http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2015>