Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015»,
26–28 травня 2015 р., Львів

УДК 517

ПРО НЕПОКРАЩУВАНІСТЬ ОПИСАННЯ ВЕЛИЧИНИ ОДНІЄЇ ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ

Олег Скасків, Світлана Панчук

Львівський національний університет імені Івана Франка, psi.lana12@gmail.com

Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ – послідовність попарно різних чисел така, що

$$(\forall n \geq 0): 0 \leq \lambda_n < sup\lambda_j : j \geq 0 := D \leq +\infty, \tag{1}$$

тобто, послідовність λ не досягає своєї точної верхньої грані. Якщо $D = +\infty$, то умова (1) виконується для будь-якої послідовності невід'ємних чисел. Нехай f – ціла функція, що зображається абсолютно збіжним в усій комплексній площині $\mathbb{C}$ рядом Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}. \tag{2}$$

З необхідної умови збіжності в т. $z = 0$ випливає, що $a_n \to 0\,(n \to \infty)$, а отже $-\ln|a_n| \to +\infty\,(n \to +\infty)$. Тому послідовність $(-\ln|a_n|)$ можна впорядкувати за неспаданням. Нехай (μ_n) таке її впорядкування:

$$\{\mu_n : n \geq 0\} = \{-\ln|a_n| : n \geq 0\},$$
$$(\forall n \geq 0)(\exists! k(n)): \mu_n = -\ln|a_{k(n)}|, \quad (\forall n \geq 0): \mu_{n+1} \geq \mu_n.$$

Через H_a позначимо клас всіх цілих рядів Діріхле вигляду (2) з фіксованою послідовністю $a = (|a_n|)$ або (μ_n). У 1994 О. Б. Скасків довів таке твердження:

Теорема А [1]. *Нехай* $f \in H_a$ *і виконується умова*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu_{n+1} - \mu_n} < +\infty, \tag{3}$$

тоді існує множина $E \subset [1, +\infty)$ *скінченної логарифмічної міри, тобто* $\int_E d\ln r < +\infty$, *така що*

$$M(x, f) = (1 + o(1))\mu(x, f) \tag{4}$$

при $x \to +\infty (x \notin E)$.

У праці [1] доведено також необхідність умови (3) для того, щоб співвідношення (4) виконувалось для кожної функції $f \in H_a$ при $x \to +\infty (x \notin E)$.

У 2008 Я. З. Стасюк довів,що опис величини виняткової множини E з теореми A істотно покращити не можна.

Теорема B [2]. *Для кожної додатної зростаючої на* $[1,+\infty)$ *функції* $h(r)$ *для будь-якої послідовності* (μ_n)*, що задовольняє умову (3) існує цілий ряд Діріхле* $f \in H_a$ *з* $a_n = e^{-\mu_n} (n \ge 0)$*; множина* $E \subset [1,+\infty)$ *і стала* $\beta > 0$ *такі що:* $ln_h - meas(E) := \int_E h(r) d\ln r = +\infty$ і $(\forall x \in E): f(x) \ge (1+\beta)\mu(x, f)$.

Розглянемо тепер кратний ряд Діріхле

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{<z,\lambda_n>}, z \in \mathbb{C}^p, p \ge 2\,, \tag{5}$$

де $n = (n_1,\dots,n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $\|n\| = n_1 + \dots + n_p$, а послідовність показників $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \dots \lambda_{n_p}^{(p)})$ $0 \le \lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty (0 \le k \uparrow +\infty)$ $<z,\lambda_n> = z_1\lambda_{n_1}^{(1)} + \dots + z_p\lambda_{n_p}^{(p)}$. Для $x = (x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{R}^p$ позначимо: $M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)|: y \in \mathbb{R}^p\}$, $\mu(x,F) = \max\{|a_n| e^{<x,\lambda_n>} : n \in \mathbb{Z}_+^p\}$, а конус зростання $\mu(x,F)$ так: $K_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^p : \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln\mu(tx,F)}{t} = +\infty \right\}$. Нехай $(\mu_k)_{k\ge0}$ – впорядкування за неспаданням послідовності $(-\ln|a_n|)$, $n \in \mathbb{Z}^p$. Через H_a^p позначимо клас цілих функцій, що подаються абсолютно збіжними рядами Діріхле. У 1997 р. М. Р. Луцишин та О. Б. Скасків довели такий аналог теореми А.

Теорема C [3]. *Якщо* $F \in H_a^p$ *і виконується умова (3), то існує така множина* $E \subset x:|x| \ge 1$*, що для кожного конуса* K *з вершиною в початку координат* 0 *такого, що* $K\,0 \subset K_F$ *при* $|x| \to +\infty$ $(x \in K \,|\, E)$*, виконується*

$$M(x,f) = (1+o(1))\mu(x,f)\,, \tag{6}$$

$$\tau_p(E) = \int_E \frac{dx}{|x|^p} < +\infty\,. \tag{7}$$

Виникає питання про непокращуваність опису (7) величини виняткової множини E. Позитивну відповідь на це питання дає таке твердження:

Теорема 1. *Для кожної зростаючої функції* $h(x): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *та для будь-якої послідовності* μ_n*, що задовольняє умову (3) існують цілий ряд Діріхле вигляду (5), показники якого задовольняють умову (1), множина* $\dot{\text{A}}$ *та стала* $\beta > 0$ *такі, що*

$$F(x) \ge (1+\beta)(\mu(x,F)) \tag{8}$$

для всіх $x \in E$*, а також* $\int_E \frac{h(|x|)}{|x|^p} dx_1 \dots dx_p = +\infty$.

1. *Скаскив О. Б.* О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей // Матем. заметки. – 1994. – Т. 56, № 5. – С. 117-128.
2. *Стасюк Я. З.* Про ряди Діріхле з монотонними коефіцієнтами і остаточність опису виняткової множини // Матем. вісник НТШ. – 2008. – Т. 5 – С. 202-207.
3. *Луцишин М. Р., Скасків О. Б.* Про мінімум модуля кратного ряду Діріхле з монотонними коефіцієнтами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, № 4. – С. 21-25.

ON THE DESCRIPTION OF EXCEPTIONAL SET, THAT CANNOT BE IMPROVED

Article deals with the description of the exceptional set for entire Dirichlet series of several variables. Example shows that existing description cannot be improved.