**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015»,
26–28 травня 2015 р., Львів**

УДК 512.64

ПРО НАЙБІЛЬШИЙ СПІЛЬНИЙ ЛІВИЙ ДІЛЬНИК МАТРИЦЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Андрій Романів

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, romaniv_a@ukr.net

Нехай R – комутативна адекватна область з $1 \neq 0$, $M_2(R)$ – кільце 2×2 матриць над R і $A, B \in M_2(R)$. Для матриць A та B існують такі оборотні матриці P_A, P_B та Q_A, Q_B, що

$$P_A A Q_A = E \text{, де } E = diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2),\ \varepsilon_1 | \varepsilon_2,$$
$$P_B B Q_B = \Delta \text{, де } \Delta = diag(\delta_1, \delta_2),\ \delta_1 | \delta_2.$$

Матриці E та Δ називають канонічними діагональними формами або ж формами Сміта, а матриці P_A, P_B та Q_A, Q_B – лівими та правими перетворювальними матрицями матриць A та B відповідно.

Позначимо через $\mathbf{P}_A$ та $\mathbf{P}_B$ множини всіх лівих перетворювальних матриць для матриць A та B відповідно.

Розглянемо групи $\mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}}$ та $\mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\delta_1)}}$, які складаються з оборотних матриць вигляду

$$\left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \delta_1)} l_{21} & l_{22} \end{matrix} \right\|$$

відповідно.

Якщо $A = BC$, то кажуть, що матриця B є лівим дільником матриці A, а матриця A є правим кратним для матриці B. Якщо C – оборотна матриця, то матрицю A називають асоційованою справа до матриці B. Якщо $A = DA_1$ та $B = DB_1$, то матрицю D називають спільним лівим дільником матриць A та B. Окрім того, якщо кожний інший спільний лівий дільник матриць A та B ділить зліва матрицю D, то матрицю D називають найбільшим спільним лівим дільником матриць A та B (у позначеннях $(A, B)_l$).

У 1933 р. C. C. MacDuffee [1], на основі результатів E. Cahen [2] та A. Chatelet [3] запропонував метод знаходження найбільшого спільного лівого дільника матриць A та B. У 1949 р. B. M. Stewart [4] показав, що найбільший спільний лівий дільник матриць A та B визначений однозначно з точністю до правої асоційованості.

Теорема. *Нехай*

$$A \sim E = diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2),\ \varepsilon_1 | \varepsilon_2,\ B \sim \Delta = diag(\delta_1, \delta_2),\ \delta_1 | \delta_2,$$

$P_B P_A^{-1} = \| s_{ij} \|_1^2$, *де* $P_A \in \mathbf{P}_A$, $P_B \in \mathbf{P}_B$. *Тоді,*

1) *якщо принаймні одна з матриць* A, B *є неособливою або* A *і* B *є особливими та* $s_{21} \neq 0$, *то*

$$(A, B)_l = (L_A P_A)^{-1} \Phi = (L_B P_B)^{-1} \Phi,$$

де

$$\Phi = \begin{Vmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (\varepsilon_1, \delta_1) & 0 \\ 0 & (\varepsilon_2, \delta_2), s_{21}[\varepsilon_1, \delta_1] \end{Vmatrix},$$

а матриці L_A *та* L_B *задовольняють рівність:* $L_B^{-1} L_A = P_B P_A^{-1}$ *і належать, відповідно, до груп* $\mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)}}$ *та* $\mathbf{G}_{\frac{\varphi_2}{(\varphi_2, \delta_1)}}$;

2) *якщо матриці* A, B *є особливими та* $s_{21} = 0$, *то* $\mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B \neq \emptyset$ *і*

$$(A, B)_l = P^{-1} \Phi,$$

де

$$\Phi = \begin{Vmatrix} (\varepsilon_1, \delta_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},\ P \in \mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B.$$

1. *MacDuffe C. C.* Matrices with elements in a principal ring // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39**. – P. 570-573.
2. *Cahen E.* Théorie des Nombres. V. 1. – Paris, 1914.
3. *Chatelet A.* Groupes Abéliens Finis. – Paris, 1924.
4. *Stewart B. M.* A note on least common left multiples // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. − **55**. − 6. – P. 587-591.

GREATEST COMMON LEFT DIVISOR OF SECOND ORDER MATRICES

The explicit form of greatest common left divisor for two matrices of the second order over a commutative adequate domain is established.