**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015»,
26–28 травня 2015 р., Львів**

УДК 517.524+517.588

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ НЬОРЛУНДА У ПОЛІ p-АДИЧНИХ ЧИСЕЛ

Михайло Симотюк, Оксана Медвідь

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, quaternion@ukr.net, medoks@ukr.net

Нехай $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ – гіпергеометрична функція Гауса [1],

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!},$$

де $(\alpha)_n=\Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)$, $n\geq 0$, а Γ – гамма-функція Ейлера. Відомо [2], що відношення $F(\alpha,\beta,\gamma;z)/F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;z)$ допускає розвинення у ланцюговий дріб Ньорлунда

$$b_0(z)+\underset{n=1}{\overset{\infty}{D}}\frac{a_n(z)}{b_n(z)},$$

де

$$a_n(z)=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)z(1-z)}{(\gamma+n)(\gamma+n-1)},\ n\geq 1,$$

$$b_n(z)=1-\frac{\alpha+\beta+2n+1}{\gamma+n}z,\ n\geq 0.$$

У роботі [2] знайдено множину M тих комплексних z та вказано такі значення параметрів α,β,γ, для яких функціональна послідовність підхідних дробів

$$f_n(z)\equiv b_0(z)+\underset{k=1}{\overset{n}{D}}\frac{a_k(z)}{b_k(z)},\ n\geq 1,$$

дробу Ньорлунда рівномірно збігається на M при $n\to\infty$ до відношення $F(\alpha,\beta,\gamma;z)/F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;z)$. Аналогічні результати встановлено у [3] для випадку гіллястого ланцюгового дробу Ньорлунда, у який розвивається відношення гіпергеометричних функцій Гауса багатьох комплексних змінних.

Дана доповідь присвячена перенесенню згаданих результатів на випадок, коли параметри α, β, γ, z є p-адичними числами, а збіжність послідовності підхідних дробів $f_n(z)$, $n \geq 1$, розглядається у p-адичній нормі.

Нехай p – просте число, $\mathbb{Q}_p$ – поле p-адичних чисел, $|\bullet|_p$ – p-адична норма на $\mathbb{Q}_p$.

Теорема. *Нехай* $\alpha, \beta, \gamma, z \in \mathbb{Q}_p$ *є такими, що:*

$$|\alpha|_p > 1,\ |\beta|_p > 1,\ |\gamma|_p > \max\{|\alpha|_p, |\beta|_p\},\ |z|_p < p^{-1/(p-1)}.$$

Тоді послідовність $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ *рівномірно збігається в* p*-адичному крузі* $\left\{z \in \mathbb{Q}_p : |z|_p < p^{-1/(p-1)}\right\}$ *при* $n \to \infty$ *до* $F(\alpha, \beta, \gamma; z) / F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; z)$.

Важливим елементом доведення теореми є встановлення оцінок для:

1) p-адичних норм чисельників та знаменників підхідних дробів $f_n(z)$, $n \geq 1$;

2) норм $\left|f_{n+1}(z) - f_n(z)\right|_p$ різниць послідовних підхідних дробів;

3) норм $\left|Q_{k,n}(z) - Q_{k,n+1}(z, w)\right|_p$, $1 \leq k \leq n-1$, де $Q_{k,n}(z) \equiv b_k(z) + \mathop{D}_{j=k+1}^{n} \dfrac{a_j(z)}{b_j(z)}$,

а $$Q_{k,n+1}(z, w) \equiv b_k(z) + \mathop{D}_{j=k+1}^{n+1} \frac{a_j(z)}{d_j(z, w)}, \qquad d_j(z, w) \equiv b_j(z), \qquad k+1 \leq j \leq n,$$

$d_{n+1}(z, w) \equiv w$, $w \in \mathbb{Q}_p$, $|w|_p = 1$.

1. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
2. *Frank E.* A new class of continued fraction expansions for the ratios of hypergeometric functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1958. – **88**. – P. 288–300.
3. *Гоєнко Н.* Наближення гіпергеометричних функцій Лаурічелли гіллястими ланцюговими дробами // Дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2003. – 113 с.

ON CONVERGENCE OF NÖRLUND CONTINUED FRACTION IN p-ADIC NUMBERS FIELD

The conditions of convergence of Nörlund continued fraction in p-adic number field are established.