Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015», 26–28 травня 2015 р., Львів

УДК 512.643.4

МАТРИЧНІ ЛІНІЙНІ ОДНОСТОРОННІ РІВНЯННЯ НАД КВАДРАТИЧНИМИ КІЛЬЦЯМИ

Наталія Ладзоришин

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, natalja.ladzoryshyn@gmail.com

Матричні лінійні рівняння, в тому числі матричні діофантові рівняння, знаходять застосування у багатьох задачах теорії керування [1, 2].

Відомий критерій існування та деякі способи знаходження розв'язків матричного лінійного рівняння

$$AX + BY = C, \tag{1}$$

над полями P [3], кільцями поліномів $P[\lambda]$ [4]. У статті [5] запропоновано метод побудови розв'язків матричних односторонніх діофантових поліноміальних рівнянь, який ґрунтується на трикутних формах з інваріантними множниками на головних діагоналях набору поліноміальних матриць щодо напівскалярної еквівалентності. Вказані умови існування розв'язків певних степенів такого матричного рівняння [6]. У статті [7] запропоновано метод побудови розв'язків матричного рівняння (1) над комутативними областями скінченно породжених головних ідеалів, який ґрунтується на застосуванні стандартної форми пари матриць (A, B) щодо узагальненої еквівалентності. Ми розглядаємо матричне рівняння (1) над квадратичними кільцями, вказуємо необхідні і достатні умови існування розв'язків цього рівняння.

Нехай $\mathbb{Z}$ – кільце цілих чисел. Тоді $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ – квадратичне кільце [8], де $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$ і k не ділиться на квадрат жодного простого числа.

Якщо $k \equiv 2, 3 (\mathrm{mod}\, 4)$, тоді $\mathbb{K}$ складається з елементів вигляду $a + b\sqrt{k}$, де $a, b \in \mathbb{Z}$; якщо $k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, тоді елементи кільця мають вигляд $a/2 + (b/2)\sqrt{k}$, де $a, b \in \mathbb{Z}$ і $a - b$ ділиться на 2.

Розглянемо рівняння (1) у випадку, коли коефіцієнти A, B, C – $n \times n$– матриці над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$. Тоді матриці A, B, C, і матриці X, Y можна записати у наступному вигляді:

$A = A_1 + A_2\sqrt{k}$, $\quad B = B_1 + B_2\sqrt{k}$, $\quad C = C_1 + C_2\sqrt{k}$, $\quad X = X_1 + X_2\sqrt{k}$, $Y = Y_1 + Y_2\sqrt{k}$, якщо $k \equiv 2, 3 (\mathrm{mod}\, 4)$;

$$A=\frac{1}{2}\left(A_1+A_2\sqrt{k}\right),\quad B=\frac{1}{2}\left(B_1+B_2\sqrt{k}\right),\quad C=\frac{1}{2}\left(C_1+C_2\sqrt{k}\right),$$

$$X=\frac{1}{2}\left(X_1+X_2\sqrt{k}\right),\quad Y=\frac{1}{2}\left(Y_1+Y_2\sqrt{k}\right),$$

якщо $k\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, де A_i, B_i, C_i, X_i, Y_i $i=1,2$ – $n\times n$ – матриці над $\mathbb{Z}$.

Теорема. *Матричне рівняння (1), A,B,C – відомі, а X,Y – невідомі матриці над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$, має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці*

$$\left\|\begin{matrix} A_1 & A_2k & B_1 & B_2k & \tilde{C}_1 \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & \tilde{C}_2 \end{matrix}\right\| \quad i \quad \left\|\begin{matrix} A_1 & A_2k & B_1 & B_2k & \mathbf{0} \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 & \mathbf{0} \end{matrix}\right\|$$

еквівалентні над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$, де

$$\tilde{C}_i=\begin{cases} C_i, & \text{якщо} \quad k\equiv 2,3\left(\mathrm{mod}\,4\right), \\ 2C_i, & \text{якщо} \quad k\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,4\right) \end{cases}, i=1,2.$$

Також ми вказуємо необхідні і достатні умови існування і єдиності цілочислових розв'язків цього рівняння, тобто розв'язків X,Y над кільцем $\mathbb{Z}$.

1. *Wolovich W. A., Antsaklis P. J.* The canonical Diophantine equations with applications // SIAM J. Control and Optimization. – 1984. – **22**, № 5 – P. 777–787.
2. *Tzekis P. A.* A new algorithm for the solution of a polynomial matrix Diophantine equation // Appl. Math. and Comp. – 2007. – **193**. – P. 395–407.
3. *Lancaster P., Tismenetsky M.* The theory of matrices. – New York: Academic Press, 1985. – 570 p.
4. *Kaczorek T.* Polynomial and Rational Matrices. Applications in Dynamical Systems Theory, Communications and Control Engineering – Springer, Dortrecht, 2007. – 503 p.
5. *Джалюк Н. С., Петричкович В. М.* Розв'язки матричного діофантового поліноміального рівняння // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2012. – № 10 – С. 55–61.
6. *Kaczorek T.* Zero-degree solutions to $AX+BY=C$ and invariant factors assignment problem // Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences. – 1986. – **34**, № 9–10. – P. 553–558.
7. *Джалюк Н. С., Петричкович В. М.* Матричні діофантові рівняння $AX+BY=C$ // Карпатські математичні публікації. – 2011. – **3**, № 2. – С. 49–56.
8. *Родосский К. А.* Алгоритм Евклида. – М.: Наука, 1988. – 240 с.

THE MATRIX LINEAR UNILATERAL EQUATIONS OVER QUADRATIC RINGS

We give a necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of matrix linear equations $AX+BY=C$ over quadratic rings $\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$.