УДК 519.6

МЕТОД РУНГЕ–КУТТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЗАДАЧ КОШІ

Андрій Кунинець

Національний університет «Львівська політехніка», andriy.kunynets@gmail.com

Розглянемо задачу Коші

$$\begin{aligned} &u'' = -f(x,u) - \frac{2u'}{x}, \quad 0 < x \le X, \\ &u(0) = u_0, \quad \lim_{x \to 0} x^2 \frac{du}{dx} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $u \in C^{(2)}[0, X]$.

На відрізку $[0, X]$ введемо нерівномірну сітку $\hat{\overline{w}}_h = \left\{ x_n, n = \overline{0, N}, x_0 = 0, x_N = X \right\}$ з кроком $h_n = x_{n+1} - x_n$. Оскільки задача має сингулярність першого роду в точці $x = 0$, то в околі точки $x_0 = 0$ точний розв'язок цієї задачі можна розкласти в ряд Тейлора за формулою

$$u(x_0 + h) = u_0 - \tfrac{h^2}{6} f - \tfrac{h^3}{12} f_x - \tfrac{h^4}{40}\left(f_{xx} - \frac{1}{3} f_u f \right) + O\left(h^5\right),$$

$$u'(x_0 + h) = -\tfrac{h}{3} f - \tfrac{h^2}{4} f_x - \tfrac{h^3}{10}\left(f_{xx} - \frac{1}{3} f_u f \right) - \tfrac{h^4}{36}\left(f_{xxx} - f_{xu} f - \frac{1}{2} f_u f_x \right) + O\left(h^5\right),$$

де значення функції $f(x,u)$ та її частинні похідні взяті при $x = x_0, u = u_0$.

Для чисельного розв'язування задачі Коші (1) в околі точки $x_0 = 0$ побудуємо метод Рунге–Кутта вигляду

$$\begin{aligned} &k_1' = -f\left(0, u_0\right), \\ &k_2 = h a_{21} k_1', \\ &k_2' = -f\left(c_2 h, u_0\right), \\ &k_3 = h\left(a_{31} k_1' + a_{32} k_2'\right), \\ &k_3' = -f\left(c_3 h, u_0 + h a_{32} k_2\right), \\ &k_4 = h\left(a_{41} k_1' + a_{42} k_2' + a_{43} k_3'\right), \\ &k_4' = -f\left(c_4 h, u_0 + h\left(a_{42} k_2 + a_{43} k_3\right)\right), \\ &y_1 = u_0 + h\left(b_2 k_2 + b_3 k_3 + b_4 k_4\right), \\ &y_1' = h\left(b_1 k_1' + b_2 k_2' + b_3 k_3' + b_4 k_4'\right), \end{aligned}$$

$$y_1 \approx u(x_1),\ y_1' \approx u'(x_1). \qquad (2)$$

Отримано умови, при яких метод Рунге–Кутта (2) має четвертий порядок точності

$$b_2 a_{21} + b_3 (a_{31} + a_{32}) + b_4 (a_{41} + a_{42} + a_{43}) = 1/6,$$
$$b_3 a_{32} c_2 + b_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) = 1/12,$$
$$b_3 a_{32} c_2^2 + b_4 \left(a_{42} c_2^2 + a_{43} c_3^2\right) = 1/20,$$
$$b_4 a_{43} a_{32} a_{21} = 1/120,$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1/3,$$
$$b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 = 1/4,$$
$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 + b_4 c_4^2 = 1/5,$$
$$b_3 a_{32} a_{21} + b_4 (a_{42} a_{21} + a_{43} (a_{31} + a_{32})) = 1/30,$$
$$b_2 c_2^3 + b_3 c_3^3 + b_4 c_4^3 = 1/6,$$
$$b_3 c_3 a_{32} a_{21} + b_4 c_4 (a_{42} a_{21} + a_{43} (a_{31} + a_{32})) = 1/36,$$
$$b_4 a_{43} a_{32} c_2 = 1/72. \qquad (3)$$

Оскільки система (3) є системою 11 нелінійних рівнянь з 13 невідомими, то вона має безліч розв’язків. Наведемо значення коефіцієнтів методу Рунге–Кутта (2), (3) у вигляді таблиці

Таблиця 1. Коефіцієнти методу Рунге–Кутта

$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$			
$\frac{1}{2}$	$-\frac{21}{80}$	$\frac{5}{16}$		
$\frac{14}{15}$	$-\frac{28}{1125}$	$\frac{406}{1125}$	$\frac{1456}{3375}$	
	$\frac{1}{210}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{4}{65}$	$\frac{225}{1456}$

В інших точках сітки $x_n \neq x_1$ чисельний розв’язок задачі Коші (1) будемо шукати за допомогою класичного методу Рунге–Кутта (див., напр., [1]).

1. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.:Мир, 1990. – 512 с.

THE RUNGE-KUTTA METHOD OF 4 ORDER OF ACCURACY FOR THE SINGULAR INITIAL VALUE PROBLEM

The Runge-Kutta method of 4 order of accuracy for numerical solving the singular initial value problem with a singularity of the first kind is constructed.