**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015»,
26–28 травня 2015 р., Львів**

УДК 517.983

# NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR NONHOMOGENEOUS EVOLUTION EQUATION OF FIRST ORDER

**Grzegorz Kuduk**

University of Rzeszow, Poland, gkuduk@onet.eu.

Let $A$ be a given linear operator acting in the linear space $H$, and for this operator arbitrary powers $A^n, n = 2, 3, \dots,$ be also defined in $H$. Denote by $x(\lambda)$ the eigenvector of the operator $A$, which corresponds to its eigenvalue $\lambda \in \mathbb{C}$.

We consider nonhomogeneous problem with integral condition

$$\left[\frac{d}{dt} - a(A)\right] U(t) = f(t), \quad t \in (0, T), \tag{1}$$

$$p(A)U\big|_{t=0} + q(A)U\big|_{t=h} + \int_0^h U(t)dt = 0, \tag{2}$$

where $h > 0$, $U : (0, h) \to H$ is an unknown vector-function, $f(t) : (0, h) \to H$ is given vector-function, $a(A)$ is an abstract operator with entire symbol $a(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $p(A)$, $q(A)$ are given polynomials.

**Definition.** *We shall say that vector-function* $f(t), t \in (0, h)$, *belongs to* $L_\Lambda$, *if there exists a measure* $\mu(\lambda)$ *on* $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ *and linear operator* $F_f(t, \lambda) : H \to H$, $t \in (0, h), \lambda \in \Lambda$, *such that*

$$f(t) = \int_\Lambda F_f(t, \lambda) x(\lambda) d\mu_f(\lambda) \tag{3}$$

Let $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) + q(\lambda) \exp[a(\lambda)h] + \eta(\lambda) \neq 0\}$,

where $\eta(\lambda) = \dfrac{\exp[a(\lambda)h] - 1}{a(\lambda)}$,

and

$$G(t,v,\lambda)=$$
$$=\frac{exp[vt]}{L(v,\lambda)}-\frac{[v(p(\lambda)+q(\lambda)\,exp[vh])+exp[vh]-1]\,exp[a(\lambda)t]}{vL(v,\lambda)(p(\lambda)+q(\lambda)\,exp[a(\lambda)h]+\eta(\lambda))}.$$

**Theorem.** *Let in equation (1) $f(t)$ belong to $L_\Lambda$, i.e. $f(t)$ can be represented in the form (3). Then the formula*

$$U(t)=\int_\Lambda F_f\left(\frac{d}{dv},\lambda\right)\ G(t,v,\lambda)x(\lambda)\Bigg|_{v=0} d\mu_f(\lambda),$$

*defines a formal solution of problem (1), (2).*

We construct a solution of the problem (1), (2) with the use of the differential-symbol method [1, 2]. Problem with integral condition for differential-operator equations has been studied in works [3, 4].


1. *Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M.* Generalized scheme of separation of variables. Differential-symbol method. – Lviv: Publishing House of Lviv Polytechnic National University, 2002. – 229 p.
2. *Kalenyuk P. I., Baranetskyj Ya. Ye., Nytrebych Z. M.* Generalized method of separation of variables. – Kyiv: Naukova dumka, 1993. – 232 p. (in Russian).
3. *Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M., Kohut I. V., Kuduk G., Pukach P. Ya.* Problem with homogeneous integral condition for nonhomogeneous evolution equation // Journal of National University «Lvivska Politechnika», Physical and math. Sciences. – 2015. – № 804. – P. 16-20.
4. *Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M., Kohut I. V., Kuduk G.,* Problem with integral condition for evolution equation // Journal of Math. and Appl. – 2015. – Vol. 38. – P. 71-76.


## НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

*Запропоновано метод розв'язування за допомогою операторно-символьного методу задачі з інтегральними умовами для неоднорідного диференціально-операторного рівняння першого порядку за часовою змінною (виділеною змінною, за якою задано нелокальні інтегральні умови) з оператором, визначеним в лінійному просторі* $H$. *Для правих частин рівняння, що належать до спеціального підпростору простору* $H$, *у якому вектори зображуються як інтеграли Стілтьєса за деякою мірою, розв'язок задачі подано у вигляді інтегралів Стілтьєса за цією ж мірою.*