Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015», 26–28 травня 2015 р., Львів

УДК 512.548

ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ ТОТОЖНОСТЕЙ ПАРАСТРОФНОЇ АСОЦІАТИВНОСТІ

Галина Крайнічук

Хмельницький національний університет, kraynichuk@ukr.net

Групоїд $(Q;\cdot)$ називається *квазігрупою* [1], якщо кожне з рівнянь $x\cdot a=b$ і $a\cdot y=b$ має єдиний розв'язок, σ *-парастроф* [2] операції

$$x_{1\sigma}\overset{\sigma}{\cdot}x_{2\sigma}=x_{3\sigma}\ \ :\Leftrightarrow\ \ x_1\cdot x_2=x_3\,,\ \sigma\in S_3\,.$$

σ *-парастроф* класу квазігруп $\mathfrak{I}$ [2] − клас квазігруп ${}^{\sigma}\mathfrak{I}$, який складається з усіх σ-парастрофів квазігруп із $\mathfrak{I}$. В [2] також встановлено, що довільне твердження виконується в деякому класі квазігруп тоді і тільки тоді, коли його σ *-парастрофне* твердження виконується в σ *-парастрофі* цього класу. Множину всіх попарно парастрофних класів квазігруп називають *в'язкою* [2].

Співставлення кожній квазігрупі (класу квазігруп) її (його) парастрофа є дією групи S_3 на множині парастрофів. Оскільки S_3 має 6 різних підгруп, то кількість різних парастрофів (елементів в'язки) є дільником шістки. Довільна тотожність однозначно визначає в'язку многовидів.

Означення *тотожностей парастрофної асоціативності* [2]:

$$\left(x\overset{\sigma_1}{\cdot}y\right)\overset{\sigma_2}{\cdot}z=x\overset{\sigma_3}{\cdot}\left(y\overset{\sigma_4}{\cdot}z\right),\ \text{де}\ \sigma_i\in S_3,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \qquad (1)$$

Лема. *Якщо в (1) принаймні три операції збігаються, то такі тотожності рівносильні таким одинадцяти тотожностям:*

$$xy\cdot z=x\cdot yz, \qquad (2)$$
$$xy\cdot z=x\cdot zy, \qquad (3)$$
$$(x\cdot yz)\cdot z=xy, \qquad (4)$$
$$xy\cdot yz=xz, \qquad (5)$$
$$xy\cdot zy=xz, \qquad (6)$$
$$(x\cdot yz)\cdot y=xz, \qquad (7)$$
$$xy\cdot z=yz\cdot x, \qquad (8)$$
$$(xy\cdot z)\cdot yz=x, \qquad (9)$$
$$x\cdot(xy\cdot z)=yz, \qquad (10)$$
$$(xy\cdot z)\cdot x=yz, \qquad (11)$$
$$xy\cdot(zx\cdot y)=z. \qquad (12)$$

Груповим ізотопом [1] називається групоїд $(Q;\cdot)$, який ізотропний деякій групі. Для довільного елемента 0 із множини Q існує єдина четвірка

$(+,\alpha,\beta,c)$ така, що $x\cdot y=\alpha x+c+\beta y$ (*канонічний розклад*), якщо $(Q;+)$ – група, 0 її нейтральний елемент, $\alpha(0)=\beta(0)=0$ [3].

П. Каннаппан [4] називає тотожність (6) транзитивністю, проте вона є (32)-*парастрофом асоціативності* (2). Тотожності (3), (8), (12) знайшов і досліджував В. Білоусов [5], тотожності (4), (10) вивчав М. Фіала [6], проте вони є (32)-, (231)-*парастрофами тотожності* (3). Тотожність (5) відома як тотожність транзитивності. Канонічні розклади квазігруп, які задовольняють згадані тотожності можна знайти у працях [1], [4], [5], [6] відповідно. Інші тотожності перераховані А. Крапежєм [7], проте ніяких властивостей про квазігрупи, які їх задовольняють, не вказано. Автором знайдено канонічні розклади квазігруп, які задовольняють тотожності (7), (9), (11).

Теорема. *Якщо в (1) принаймні три операції збігаються, то такі тотожності визначають п'ять в'язок многовидів, які визначаються тотожностями (2), (5), (7), (9) та (11).*

1. *Белоусов В .Д.* Основы теории квазигрупп и луп. – М.: Наука, 1967. – 222 с.
2. *Sokhatsky F. N.* Symmetry in quasigroup and loop theory – 3rd Mile High Conference on Nonassociative Mathematics, Denver, Colorado, USA, 2013. http://web.cs.du.edu/~petr/milehigh/2013/Sokhatsky.pdf.
3. *Сохацький Ф. М.* Про ізотопи груп. II // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 12. – С. 1692-1703.
4. *Kannappan Pl.* Functional Equations and Inequalities with Applications – Springer Science+Business Media, 2009, – P.810.
5. *Белоусов В. Д.* Уравновешенные тождества в квазигруппах // М.:Мат. сборн. новая серия, − 1966. − Т. 70 (112):1. – С. 55-97.
6. *Nick C. Fiala* Short identities implying a quasigroup is a loop or group // Quasigroups and Related Systems – 2007. – 15 – P. 263-271.
7. *Krapez A.* Generalized quadratic quasigroup equations with three variables // Quasigroups and Related Systems – 2009. – 17 – P. 253-270.

ON CLASSIFICATION OF PARASTROPHICAL ASSOCIATIVITY IDENTITIES

All parastrophical associativity identities can obtain from the associativity identity by replacing all appearances of the operation symbol with some of its parastrophes. Parastrophical associativity identities with at least three coinciding parastrophes are considered and equivalency to five given identities is proved. Canonical decompositions of quasigroup operations satisfying these identities are found.