**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015»,
26–28 травня 2015 р., Львів**

УДК 517.958:512.816

GROUP CLASSIFICATION OF A CLASS OF NON-LINEAR GENERALIZED KOMPANEETS EQUATIONS

Sergii Kovalenko[1], Oleksii Patsiuk[2]

[1]Poltava National Technical Yuriy Kondratyuk University, kovalenko@imath.kiev.ua;
[2]Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, patsyuck@yahoo.com

We consider a class of non-linear generalized Kompaneets equations (GKEs):

$$u_t = \frac{1}{h(x)} \cdot \left[h^2(x) \cdot (u_x + f(u))\right]_x, \quad (t, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, \tag{1}$$

where $f(u)$ and $h(x)$ are arbitrary smooth functions of their variables such that $f''(u) \neq 0,\ h'(x) \neq 0$. Using the Lie-Ovsiannikov algorithm, the group classification of the class under study is carried out. It is shown that the kernel algebra of the full groups of the GKEs is the one-dimensional Lie algebra $\langle \partial_t \rangle$. Our main results are formulated in the following theorems.

Theorem 1. *The group of equivalence transformations of the class of GKEs* (1) *consists of the following transformations:*

$$\bar{t} = A_1 t + A_2,\ \bar{x} = B_1 x + B_2,\ \bar{u} = C_1 u + C_2,\ \bar{f} = \frac{C_1}{B_1} f,\ \bar{h} = \frac{B_1^2}{A_1} h, \tag{2}$$

where $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ *and* $A_1 B_1 C_1 \neq 0$.

Theorem 2. *All possible maximal algebras of invariance of the GKEs* (1) *with some fixed functions* $f(u)$ *and* $h(x)$ *are described in Table* 1. *Any other equation of the form* (1) *with non-trivial Lie symmetry maps to one of the equations given in Table* 1 *by means of the equivalence transformations of the form* (2).

Table 1. *The group classification of the GKEs* (1)

№	$f(u)$	$h(x)$	Basis of $A^{\max}$
1	$\forall^{\mathrm{a}}$	e^{2kx}	$\partial_t,\ 2kt\partial_t - \partial_x$
2	e^u	$x^{2+k}\ (k \neq -2)$	$\partial_t,\ kt\partial_t - x\partial_x + \partial_u$
3	u^{1+m} $(m \neq -1, 0)$	$x^{2+k}\ (k \neq -2)$ $\left(\text{at } m = \frac{1}{3} k \neq -2, 0\right)$	$\partial_t,\ kt\partial_t - x\partial_x + \frac{1}{m} u\partial_u$

4	$u^{\frac{3}{2}} + ku$ $(k \neq 0)$	x	$\partial_t,\ e^{-kt}\left(\frac{1}{k}\partial_t - x\partial_x + 2u\partial_u\right)$
5	$u^{\frac{4}{3}} + 3ku$ $(k \neq 0)$	$e^{mx}\left\|e^{kx}+n\right\|^{2-\frac{m}{k}}$ $(m \neq 0, n \neq 0)$	$\partial_t,\ t\partial_t - \frac{1}{mn}\left(e^{kx}+n\right)\partial_x + 3\frac{k}{mn}e^{kx}u\partial_u$
6	$u^{\frac{4}{3}} + 3ku$ $(k \neq 0)$	$\left(e^{kx}+n\right)^2$ $(n \neq 0)$	$\partial_t,\ \left(e^{kx}+n\right)\partial_x - 3ke^{kx}u\partial_u,\ 2t\partial_t + {} + \left(e^{kx}+n\right)\left(\frac{x}{n} - \frac{1}{kn}\ln\left\|e^{kx}+n\right\| - 3knt\right)\partial_x - {} - 3\left[ke^{kx}\left(\frac{x}{n} - \frac{1}{kn}\ln\left\|e^{kx}+n\right\| - 3knt\right) + 1\right]u\partial_u$
7	$u^{\frac{4}{3}} + 3ku$ $(k \neq 0)$	e^{2kx}	$\partial_t,\ 2kt\partial_t - \partial_x,\ e^{kx}\left(\partial_x - 3ku\partial_u\right)$
8	$u^{\frac{4}{3}} + 3ku$	$h_{xx} - \frac{h_x^2}{2h} - kh_x = {} = \frac{2}{3}b\ (b \neq 0)$	$\partial_t,\ e^{bt}\sqrt{\left\|h(x)\right\|}\left(\partial_x - \frac{3}{2}\frac{h'(x)}{\left\|h(x)\right\|}u\partial_u\right)$
9	$u^{\frac{4}{3}}$	x^2	$\partial_t,\ x\partial_x - 3u\partial_u,\ 2t\partial_t + (3t + \ln x)x\partial_x - {} - 3(3t + \ln x + 1)u\partial_u$

[a]Except $f(u) = u^{\frac{4}{3}} + 3ku\ (k \neq 0)$.

ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ РІВНЯНЬ КОМПАНІЙЦЯ

Ми розглядаємо клас нелінійних узагальнених рівнянь Компанійця (УРК) із двома функціональними параметрами. Використовуючи метод Лі-Овсяннікова, ми здійснюємо повну групову класифікацію даного класу рівнянь. Нами доведено, що ядро є одновимірною алгеброю Лі, яка породжується оператором зсуву в часі, а множина нееквівалентних (з точністю до перетворень еквівалентності) рівнянь із класу УРК, для яких існують розширення ядра, повністю вичерпується дев'ятьма випадками. Серед них є три рівняння з максимальними симетрійними властивостями (їм відповідають тривимірні алгебри Лі), які за допомогою точкового перетворення змінних зводяться до добре відомого нелінійного рівняння дифузії-конвекції.