Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015», 26–28 травня 2015 р., Львів

УДК 517.5

ПІДСУМОВУВАННЯ РОЗБІЖНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ МЕТОДОМ ВЕЙЄРШТРАССА-ГАУССА

Галина Івасик

Національний університет «Львівська політехніка», Ivasyk-G@yandex.ru

Розглядається метод степеневих множників Вейєрштрасса-Гаусса підсумовування тригонометричних рядів. Показано, що метод може бути застосований для підсумовування рядів, члени яких зростають пропорційно показниковій залежності від індекса підсумовування.

Розглянемо тригонометричний ряд Фур'є періодичної функції $f(x) \in L^1[-\pi;\pi]$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

Справедлива гранична рівність для похідної заданої функції. Якщо періодична функція $f(x) \in L^1[-\pi;\pi]$ має в точці x похідну k-го порядку, то справджується рівність [1, 2]

$$f^{(k)}(x) = \lim_{\rho\to 1-0} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n^2} n^k \left[a_n \cos\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) + b_n \sin\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)\right]\right\}. \tag{2}$$

Гранична рівність (2) визначає узагальнену суму, а послідовність $\left\{\rho^{n^2}\right\}$ при $\rho \to 1-0$ - метод підсумовування k-ої похідної ряду (1).

Якщо ввести узагальнену частинну суму ряду (1), граничну рівність (2) можна записати у вигляді подвійної граничної рівності

$$f^{(k)}(x) = \lim_{\rho\to 1-0} \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \rho^{n^2} n^k \left[a_n \cos\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) + b_n \sin\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)\right]\right\}. \tag{3}$$

Тоді, $f^{(k)}(x)$ - узагальнена сума відповідного ряду у точці x, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує номер N і існує число ρ_N, $\lim\limits_{N\to\infty} \rho_N = 1$, такі, що для всіх $n \ge N$ і $\rho = \rho_N$ справджуються нерівність

$$\left| f^{(k)}(x) - \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \rho^{n^2} n^k \left[a_n \cos\left(nx + \frac{k\pi}{2} \right) + b_n \sin\left(nx + \frac{k\pi}{2} \right) \right] \right\} \right| \le \varepsilon .$$

Отже, наближене числове значення узагальненої суми (3) є значення варіанти відповідної послідовності (залежної від двох параметрів) при досить великому значенню номер N і досить близькому до одиниці параметру $\rho = \rho(N)$. У зв'язку з цим, виникає задача вибору числових значень параметрів варіанти, які забезпечують найменшу похибку відповідного наближеного значення суми ряду.

Досліджено збіжність ряду (1), якщо його коефіцієнти мають оцінки $a_n = \mathrm{O}\left(n^m r^n\right)$, $b_n = \mathrm{O}\left(n^m r^n\right)$, де $r \ge 1$; $m \ge 0$. Показано можливість обчислення узагальненої суми ряду з достатньо великою точністю. Однак, всі числові алгоритми не є стійкими, оскільки обчислення узагальненої суми ряду супроводжується виконанням арифметичних дій з великими значеннями коефіцієнтів.

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции об интегральных преобразованиях. – Харьков: Вища школа, 1984. – 120 с.
2. *Сухорольський М. А.* Функціональні послідовності та ряди. – Львів: Растр-7, 2010. – 346 с.

SUMMATION OF DIVERGENT POWER SERIES BY WEIERSTRASS-GAUSS' METHODS

Summation of divergent power series by Weierstrass-Gauss based on the averaging operator with Gaussian kernel function is investigated. It is shown that the power series of meromorphic functions can be summed up by this method outside the circle of convergence.