**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015»,
26–28 травня 2015 р., Львів**

УДК 517.95+511.42

МЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ МАЛИХ ЗНАМЕННИКІВ ЗАДАЧІ З ДВОМА ВУЗЛАМИ ДЛЯ НАВАНТАЖЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Володимир Ільків, Михайло Симотюк, Дмитро Хомяк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, quaternion@ukr.net, khomiak.dmytro@gmail.com

Нехай $m,n,l,r,p\in\mathbb{N}$, $2<l+r<n$, Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega^p$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$, $D_x=(-i\partial/\partial x_1,\ldots,-i\partial/\partial x_p)$, $A(D_x)$ – такий диференціальний вираз порядку N_1, що $A(k)\in\mathbb{R}$ і $A(k)\neq 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$, $B_j(D_x)$, $j=1,\ldots,m$, – диференціальні вирази порядку меншого, ніж nN_1.

В області $Q_T^p=\{(t,x):t\in(0,T),\ x\in\Omega^p\}$ розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},D_x\right)u\equiv\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\lambda_j A(D_x)\right)u(t,x)=F(t,x)+N[u(t,x)], \qquad (1)$$

$$U_j[u]\equiv\alpha_j\left.\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0}-\beta_j\left.\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=T}=\varphi_j(x),\ \ j=1,\ldots,n, \qquad (2)$$

де $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – різні дійсні числа, $N[u(t,x)]\equiv\sum_{j=1}^{m}B_j(D_x)u(\tau_j,x)$, $\tau_1,\ldots,\tau_m$ – різні точки інтервалу $(0,T)$, $\alpha_j=1$, якщо $j=1,\ldots,l+r$, $\alpha_j=0$, якщо $j=l+r+1,\ldots,n$, $\beta_j=0$, якщо $j=1,\ldots,l$, $\beta_j=\mu$ ($\mu\neq 0$), якщо $j=l+1,\ldots,l+r$, $\beta_j=-1$, якщо $j=l+r+1,\ldots,n$.

При дослідженні розв’язності задачі (1), (2) виникає потреба оцінити знизу модулі таких виразів:

$$\Delta(k)=\det\left\|U_j[\exp(i\lambda_q A(k)t)]\right\|_{j,q=1}^{n},\ \ \Gamma(k)=1-\sum_{j=1}^{m}B_j(k)\int_0^T G_k(\tau_j,\tau)d\tau, \qquad (3)$$

де $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, – функція Гріна задачі $L(d/dt,k)u_k(t)=0$, $U_j[u_k]=0$, $j=1,\ldots,n$. Вирази (3) є знаменниками коефіцієнтів ряду Фур'є, яким зображується розв'язок задачі (1), (2), ці знаменники можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$ і зумовити розбіжність вказаного ряду. За допомогою метричного підходу [1] встановлено такі результати.

Теорема 1. *Нехай існує стала* $\gamma > 0$ *така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$|A(k)| \ge |k|^{-\gamma}. \tag{4}$$

Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$*) чисел* $T>0$ *нерівність* $|\Delta(k)| \ge |k|^{-\omega_1}$ *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$*, якщо* $\omega_1 > (p+N_1)\sum_{j=0}^{r} C_n^{n-l-j} - \gamma n(n-1)/2$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і нехай* $\Delta(k) \ne 0$ *для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$*. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^m$*) векторів* $(\tau_1,\ldots,\tau_m) \in [0,T]^m$ *нерівність* $|\Gamma(k)| \ge |k|^{-\omega_2}$ *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$*, якщо* $\omega_2 > mn(p-\gamma+1)$.

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^p$*) векторів* $\left(a_{(N_1,\ldots,0)},\ldots,a_{(0,\ldots,N_1)}\right) \in \mathbb{R}^p$*, компонентами яких є коефіцієнти при старших похідних виразу* $A(D_x)$*, нерівність* (4) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$*, якщо* $\gamma > p - N_1$.

1. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

METRIC ESTIMATES OF SMALL DENOMINATORS OF TWO-POINT PROBLEM FOR LOADED HYPERBOLIC EQUATION

We proved the metric theorems about estimates from below of small denominators arising in the two-point problem with two nodes for loaded hyperbolic equation.