Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015», 26–28 травня 2015 р., Львів

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ЩО ЗУМОВЛЕНИЙ ОСЕСИМЕТРИЧНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА

Надія Ганулiч

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, nadia.ganulich@gmail.com

Одним із поширених елементів теплоенергетичних систем є циліндрична оболонка, яка в умовах експлуатації зазнає впливу значних температурних градієнтів, що зумовлює необхідність її розрахунку на міцність.

Розглядається квазістаціонарна осесиметрична задача термопружності для довгої ізотропної циліндричної оболонки із джерелами тепла, що діють в режимі функції одиничного стрибка Хевісайда. За умови тепловіддачі з бічних поверхонь оболонки побудовані функції температури і нормального прогину, що є розв'язками рівнянь теплопровідності [1]

$$\partial^2 T / \partial x^2 - \partial T / \partial\tau - \beta^2 T(x,\tau) = -R^2 / \alpha_t^{-1} Q(x,\tau) \qquad (1)$$

та прогину [2]

$$d^4 W / dx^4 + 4k^4 W(x,\tau) = 4k^4 R\beta_t T(x,\tau)\,, \qquad (2)$$

де $T(x,\tau)$ – усереднена по товщині $2h$ оболонки функція температури, $Q(x,\tau)$ – густина розподілу джерел тепла, x – віднесена до радіуса R оболонки безрозмірна осьова координата, τ – безрозмірний час, $\beta^2 = \kappa R^2 (\alpha_t h)^{-1}$, κ – коефіцієнт тепловіддачі бічної поверхні оболонки, α_t – коефіцієнт теплопровідності, $W(x,\tau)$ – віднесений до серединної поверхні оболонки нормальний прогин, $4k^4 = 3(1-\nu^2)h^2 R^{-2}$, ν – коефіцієнт Пуассона, β_t – коефіцієнт лінійного розширення.

За однорідних початкових умов та відсутності усіх розрахункових величин і їх похідних на нескінченності кільцеві зусилля $N(x,\tau)$, осьові моменти $M(x,\tau)$ та відповідні їм компоненти кільцевих σ_φ та осьових σ_x напружень визначають так:

$$N = 2Eh(W/R - \beta_t T)\,,\ M = -DR^{-2} W_{xx}^{(2)}\,,$$

$$\sigma_\varphi = (2h)^{-1}(N + 3h^{-2}\nu Mz)\,,\ \sigma_x = 1{,}5h^{-3}Mz\,, \qquad (3)$$

де z – відстань від еквідистантної до серединної $(z=0)$ поверхні оболонки, E – модуль Юнга матеріалу, $D = 2Eh^3(3(1-\nu^2))^{-1}$ – згинна жорсткість оболонки.

За кільцевого нагрівання оболонки джерелами інтенсивності $Q_0 = const$, що діють на проміжку $x \in [-a, a]$ у часовому режимі функції одиничного стрибка методом інтегральних перетворень Фур'є отримано розв'язки рівнянь (1) та (2):

$$T(x,\tau) = 0,25q_0(4\vartheta(x,\tau) - 2(e^{-\beta(x+a)} \pm e^{-\beta|x-a|}) + 2(erfcx_{1\tau} - erfcx_{2\tau}) + \\ + e^{\beta(x+a)} erfcx_{1\tau}^* - e^{-\beta(x+a)} erfcx_{2\tau}^* + e^{\beta|x-a|} erfcx_{3\tau}^* - e^{\beta|x-a|} erfcx_{4\tau}^*), \quad (4)$$

$$W(x,\tau) = \frac{8k^4 R q_0}{\pi \beta^2} \int_0^\infty \frac{1 - \exp\left(-(s^2+\beta^2)\right)}{s(s^2+\beta^2)(s^4+4k^4)} \sin as \cos xs ds, \quad (5)$$

де $q_0 = Q_0 R^2 (\alpha_t \beta^2)^{-1}$, $erfcy = 1 - \Phi(y)$, $\Phi(y)$ – інтегральна функція Лапласа, $x_{1\tau} = (x+a)/2\sqrt{\tau}$, $x_{2\tau} = |x-a|/2\sqrt{\tau}$, $x_{1\tau}^* = \beta\sqrt{\tau} + x_{1\tau}$, $x_{2\tau}^* = \beta\sqrt{\tau} - x_{1\tau}$, $x_{3\tau}^* = \beta\sqrt{\tau} + x_{2\tau}$, $x_{4\tau}^* = \beta\sqrt{\tau} - x_{2\tau}$, $\vartheta(x,a) = \vartheta(x+a) - \vartheta(x-a)$, $\vartheta(x)$ – функція Хевісайда, а знаки $\pm$ відносяться до $x \in [o, a]$ та $x \in [a, \infty)$ відповідно.

Реалізувавши ряд інтегралів [3], що виникають внаслідок розкладу в (5) підінтегрального дробу на елементарні дроби, запишемо вирази парних функцій температури та прогину в асимптотичному ($\tau \to \infty$) режимі:

$$T(x) = q_0 \begin{Bmatrix} 1 - e^{-\beta a} ch\beta x, x \in [0, a] \\ sh\beta a e^{-\beta x}, x \in [a, \infty) \end{Bmatrix},$$

$$W(x) = \frac{\beta_t R q_0}{1+\gamma_0^2} \begin{Bmatrix} 1 + \gamma_0^2 (1 - e^{-\beta a} ch\beta x) - \gamma_0 f_1(x) - f_2(x), x \in [o, a] \\ \gamma_0^2 sh\beta a e^{-\beta x} - \gamma_0 f_3(x) + f_4(x), x \in [a, \infty) \end{Bmatrix}.$$

Тут $f_1(x) = (\sin ak \cos kx chkx - \cos ak \sin kx shkx) e^{-ak}$, $f_2(x) = (\cos ak \cos kx chkx + \sin ak \times \times \sin kx shkx) e^{-ak}$, $f_3(x) = (\sin ak chak \cos kx - \cos ak shak \sin kx) e^{-kx}$, $f_4(x) = (\cos ak \times \times shak \cos kx + \sin ak chak \sin kx) e^{-kx}$, $\gamma_0 = 2k^2 \beta^{-2}$.

Виразів зусиль, моментів та відповідних їм напружень тут не наводимо. Зауважимо, що за суперпозицією розв'язок розглянутої задачі переноситься на випадок n-кільцевого нагрівання, зокрема й джерелами неоднакової в окремих зонах нагрівання інтенсивності.

Проведені числові розрахунки вказують на задовільну збіжність асимптотичних розв'язків задачі вздовж осьової координати, причому доведено, що зусилля та моменти (а, отже і напруження) досягають при цьому максимальних рівнів.

1. *Болотин В. В.* Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла // Прикл. математика и механика. – 1960. – 24, № 2. – С. 361-363.
2. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наукова думка, 1978. – 343 с.
3. *Градштейн И. С. и Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.

THERMOELASTIC STATE OF CYLINDRICAL SHELL DUE TO AXISYMMETRIC HEAT SOURCES

The solution of the quasi-stationary problem of thermoelasticity for the long cylindrical shell with the axisymmetric distribution of the heat sources in the thermal range and cooling from the approach surface by Newton's law was obtained. The results are extended to the case of any number of the rings of heating. The thermoelastic state of the shell under single- and double- ring heating at the asymptotic regime, where the circumferential forces and axial torques reach their maximums, was studied in details.