Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015», 26–28 травня 2015 р., Львів

УДК 517.5

ФРАКТАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ СПЛАЙНАМИ ФУНКЦІЙ З КЛАСУ H^{ω}

Тетяна Брязкало

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
e-mail tianan@yandex.ru

Фрактальна інтерполяція на сьогодні є ефективним методом при розвязанні задач апроксимаційного характеру (див. наприклад [6-8]). У роботах Барснлі [2, 3] було запропоновано використання фрактальних функцій для наближення множини вихідних данних.

У доповіді запропоновано метод фрактальної інтерполяції за допомогою сплайнів мінімального дефекта для апроксимації вихідних функцій. Отримано похибку наближення при певних обмеженнях щодо вихідних диференційовних функцій з різних класів.

Нехай $t_0 < t_1 < ... < t_N$ – дійсні числа, $I = [t_0, t_N] \subset R$ – відрізок, що включає ці точки, функція g належить класу неперервних на відрізку I функцій $C(I)$. Позначимо через $\Delta: \quad t_0 < t_1 < ... < t_N$ розбиття відрізка $I = [t_0, t_N] \subset R$. Нехай $I_n = [t_{n-1,} t_n]$, $L_n : I \to I_n, n \in \{1, 2, ..., N\}$ – гомеоморфізм такий, що $L_n(t_0) = t_{n-1}$, $L_n(t_N) = t_{n,}$ $|L_n(c_1) - L_n(c_2)| \le l|c_1 - c_2|, \forall \{c_1, c_2\} \subset I,$ для $0 \le l \le 1.$ Розглянемо для всіх $n = 0,1,..., N$ і $F = I \times R,$ $|\alpha_n| < 1,$ N неперервних відображень $F_n : F \to R,$ які задовольняють умови

$$F_n(t_0, x_0) = x_{n-1}, \quad F_n(t_N, x_N) = x_{n,} \; n = 0,1,..., \mathrm{N},$$

$$|F_n(t, x) - F_n(t, y)| \le |\alpha_n||x - y|, \quad t \in I, \; \{x, y\} \subset R.$$

Визначимо функції: $\quad w_n(t, x) = (L_n(t), F_n(t, x)), \forall n = 0,1,..., N$.

Нехай $\Im$ – множина неперервних функцій $f : [t_0, t_N] \to R$ таких, що $f(t_0) = x_0$ і $f(t_N) = x_N$. Розглянемо метрику на $\Im$

$$d(f, g) = \| f - g \|_p = \left(\sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |f(t) - g(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, 1 \le \mathrm{p} \le \infty, t \in [t_0, t_N], \forall \{f, g\} \subset \Im.$$

Зазначимо, що простір $(\Im, d)$ є метричним і повним. Визначимо відображення $T : \Im \to \Im$ так: $(Tf)(t) = F_n(L_n^{-1}(t), f \circ L_n^{-1}(t))$ $\forall t \in [t_{n-1}, t_n],$ $n = 1,2,..., N.$

$(Tf)(t)$ є неперервною функцією на відрізку $[t_{n-1}, t_n]$ для $\forall n = 1, 2, ..., N$. Відображення T є стискуючим $(\Im, d)$, бо $\|Tf - Ts\|_p \le |\alpha| \|f - s\|_p$, де $|\alpha| = \max\{|\alpha_n| : n = 0, 1, ..., \mathrm{N}\}$. Оскільки $|\alpha| < 1$, T визначає єдину фіксовану точку на $\Im$, тобто існує $f \in \Im$ така, що $(Tf)(t) = f(t)$ для $t \in [t_0, t_N]$. Ця функція є фрактальною інтерполяційною функцією для w_n.

Система ітераційних функцій з k разів диференційовними фрактальними інтерполяційними функціями виражається наступним чином:

$$\begin{cases} L_n(t) = \dfrac{1}{N} t + b_n, \\ F_{nk}(t, x) = N^k \alpha x + s^k \circ L_n(t) - N^k \alpha b^k(t), k = 0, 1, 2, ..., p, \end{cases}$$

тобто, $q_{nk}(t) = s^k \circ L_n(t) - N^k \alpha b^k(t)$, і $(\mathrm{s}_b^\alpha)^{(k)} = (\mathrm{s}^{(k)})_{b^{(k)}}^{N^k \alpha}$, $k = 0, 1, 2, ..., p$.

Нехай $S_{N,1}$ – множина сплайнів порядку 1, дефекта 1 за рівномірним розбиттям $t_i = i/N \; (i = 0, 1, ..., N)$, $s_{N,1}(f, t)$ – сплайн з $S_{N,1}$, що визначається для $f(t) \in C$ інтерполяційними умовами $s_{N,1}(f, i/N) = f(i/N), i = 0, 1, ..., N.$

Враховуючи оцінки для інтеграла $\int_0^1 \left| f - s_{N,1} \right|^p dt$, з [1] маємо

$$\left\| f - s_{N,1} \right\|_p \le 1/\left(4N(p+1)^{1/p}\right) \omega\left(f', 1/N\right), \; p > 0; \; \left\| f' - s'_{N,1} \right\|_p \le 1/2\omega\left(f', 1/N\right), 0 < p \le 3$$

де $\omega(f, \delta)_X$ – модуль неперервності: $\omega(f, \delta)_X = \sup\limits_{|u \le \delta|} \| f(\cdot + u) - f(\cdot) \|_X$. Якщо X – нормований простір функцій $f(t)$, заданих на [0,1], то при кожному $u, |u| \le \delta,$ норма обчислюється на тій частині відрізка [0,1], яка разом з точкою t містить також і точку $t + u,$ і при цьому $0 \le \delta \le 1.$

Теорема. *Нехай* $d = d(N) > 0$ *таке, що* $0 < d < 1$ *і* $|\alpha| \le 1/N^{2+d}$. *Для функції* $f \in C^1$ *та сплайна мінімального дефекту* $s_{N,1} \in S_{N,1}$, *що визначається для* $f(t) \in C$ *інтерполяційними умовами:* $s_{N,1}(f, i/N) = f(i/N), i = 0, 1, ..., N$, *при рівномірному розбитті* $\bar{\Delta}$ *справедлива така оцінка:*

$$\left\| f - s_{N,b}^\alpha \right\|_p \le 1/\left(4N(p+1)^{1/p}\right) \omega\left(f', 1/\mathrm{N}\right) + 1/\left(N^{2+d} - 1\right) \| s_N - b \|_p, \; p > 0;$$

$$\left\| f' - \left(s_{N,b}^\alpha\right)' \right\|_p \le 1/2\omega\left(f', 1/N\right) + 1/\left(N^{1+d} - 1\right) \| g' - b' \|_p, 1 \le \mathrm{p} \le 3.$$

За допомогою граничного переходу при $\mathrm{p} \to \infty$ *отримаємо відповідну оцінку похибки в метриці* C:

$$\left\| f - s_{N,b}^\alpha \right\|_\infty \le 1/(4N) \omega\left(f', 1/N\right) + 1/\left(N^{2+d} - 1\right) \| s_N - b \|_\infty.$$

1. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М: Наука, 1984.
2. *Barnsley M. F.* Fractal Everywhere. – Academic Press, Inc, 1988.
3. *Barnsley M. F.* Fractal functions and interpolation // Contr. Approx. – 1986. – 2, 4. – P. 303-329.
4. *Barnsley M. F., Harrington A. N.* The calculus of fractal interpolation functions // J. Approx. Theory. 1989 – 57. – P. 14-34.
5. *Davis P. J.* Interpolation and approximation. – New York, 1963.
6. *Navascues M. A., Sebastian M. V.* Generelization of Hermite functions by fractal interpolation // J. Approx. Theory. – 2004 – 131, 1. – P. 19-29.
7. *Navascues M. A., Sebastian M. V.* Fractal Splines // Monografias del Seminario Matematiko Garcia de Galdeano. – 2006 – 33. – P.161-168.
8. *Navascues M. A., Sebastian M. V.* Some results of convergence of cubic spline fractal interpolation functions. // Fractals – 2003 – 11, 1. – P. 1-7.

FRACTAL INTERPOLATION BY SPLINES IN H^{ω}

A family of interpolating mappings associated to splines with minimal defect is defined. Under some hypotheses, and using Hermite polynomials techniques, bounds of interpolation error for function are obtained.