**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015»,
26–28 травня 2015 р., Львів**

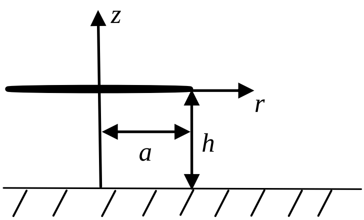
УДК 539.3

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ ІЗ ЗАЩЕМЛЕНОЮ МЕЖЕЮ ЗА ТЕПЛОВИДІЛЕННЯ У КРУГОВІЙ ОБЛАСТІ

Роман Андрійчук

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, andriychukroman@gmail.com

У праці [1] розв'язані осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для безмежного тіла з теплоактивним дисковим включенням, а у праці [2] досліджено термонапружений стан півпростору з паралельною до його незавантаженої межі круговою або еліптичною теплоактивною тріщиною. На межі підтримується нульова температура або теплоізоляція.



Ця доповідь присвячена дослідженню осесиметричного термонапруженого стану півбезмежного тіла із жорстко защемленою межею, на якій підтримується нульова температура або теплоізоляція, при тепловиділенні у круговій області S радіуса a, віддаленій від межі на віддаль h.

У циліндричній системі координат з початком у центрі області S температурне поле записуємо у вигляді [1]

$$T(r,z)=\frac{1}{2\lambda}\int_0^\infty W(\alpha)\left[e^{-\alpha|z|}+(-1)^k e^{-\alpha|z+2h|}\right]J_0(\alpha r)\,d\alpha\,, \tag{1}$$

$$W(\alpha)=\int_0^a \rho w(\rho)\,J_0(\alpha\rho)\,d\rho\,, \tag{2}$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, h – віддаль області тепловиділення від межі, $w(\rho)$ – густина джерел тепла, $k=1$ відповідає нульовій температурі межі тіла, а $k=2$ – її теплоізоляції. Із формули (1) видно, що на теплоізольованій межі ($k=2$, $z=-h$) температура вдвічі більша, ніж у цьому ж місці безмежного тіла.

Для защемленої межі граничні умови такі:

$$u_r(r,0)=0\,,\qquad u_z(r,0)=0\,. \tag{3}$$

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді

$$u(r,z)=\bar{u}(r,z)+\bar{\bar{u}}(r,z), \qquad \sigma(r,z)=\bar{\sigma}(r,z)+\bar{\bar{\sigma}}(r,z),$$

де перші доданки характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, зумовлений дзеркально розташованими відносно площини $z=-h$ двома областями S з джерелами тепла (при $k=2$) або джерелами і стоками тепла (при $k=1$), а другі – переміщення і напруження у півпросторі $z>-h$, які забезпечують виконання умов (3).

Переміщення і напруження у безмежному тілі визначаються через термопружний потенціал переміщень [1]

$$\Phi(r,z)=-A\int_0^\infty W(\alpha)\alpha^{-2}\Big[e^{-\alpha|z|}\left(1+\alpha|z|\right)+$$

$$+(-1)^k e^{-\alpha|z+2h|}\left(1+\alpha|z+2h|\right)\Big]J_0(\alpha,r)\,d\alpha\,, \quad A=\frac{\alpha_t}{4\lambda}\frac{1+\nu}{1-\nu}\,, \tag{4}$$

де α_t, ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона відповідно, $J_0(\alpha,r)$ – функція Бесселя. Зокрема,

$$\bar{u}_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,, \qquad \bar{u}_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,. \tag{5}$$

Для визначення переміщень $\bar{\bar{u}}(r,z)$ і напружень $\bar{\bar{\sigma}}(r,z)$ побудовано функцію Ґріна за допомогою бігармонічної функції Лява у півпросторі $z>0$

$$\varphi(r,z)=\int_0^\infty\left[C(\alpha)+\alpha z D(\alpha)\right]e^{-\alpha z}J_0(\alpha r)\,d\alpha\,. \tag{6}$$

Тут $C(\alpha)$ і $D(\alpha)$ – шукані функції. Переміщення визначаються формулами

$$\bar{\bar{u}}_r=-\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z}\,, \qquad \bar{\bar{u}}_z=\frac{1}{1-2\nu}\left[2(1-\nu)\Delta\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]. \tag{7}$$

Задовольняючи граничну умову (3) з використанням виразів (4), (5) при $k=1$, і (6), (7), для півпростору з нульовою температурою знаходимо

$$C(\alpha)=D(\alpha)=-\left[2A(1-2\nu)he^{-\alpha h}\right]/\left[(3-4\nu)\alpha^2\right]. \tag{8}$$

Для півпростору з теплоізольованою межею

$$C(\alpha)=-2(1-2\nu)D(\alpha)\,,$$

$$D(\alpha)=-\left[2A(1-2\nu)(1+\alpha h)e^{-\alpha h}\right]/\left[(3-4\nu)\alpha^3\right]. \tag{9}$$

При $w(r) = const$ побудовано графіки напружень σ^*_{rr}, σ^*_{zz} і $\sigma^*_{\varphi\varphi}$ ($\sigma^* = \sigma/2GB$, $B = \left(aw_0\alpha_t\left(1+\nu\right)\right)/\left(4\lambda\left(1-\nu\right)\right)$ при $r = 0$ в залежності від h, а також напружень на осі Oz при $h = 0.5; 1; 3$. Виявлено, що осьові напруження σ_{zz} за нульової температури на межі є розтягувальними, спочатку зростають при малих h, а пізніше спадають. Для теплоізольованої межі ці напруження є стискальними і максимальними за модулем в її околі, із збільшенням h вони спадають.

1. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізольованим дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 1. – С. 58–70.
2. *Кит Г. С., Сушко О. П.* Термоупругое состояние полупространтсва с паралельной к его границе теплоактивной трещиной // Прикл. механика. – 2007. – **43,** № 4. – С. 46–54.

AXISYMMETRIC THERMOSTRESSED STATE OF THE HALF-SPACE WITH DAMPED BOUNDARY WITH HEAT RELEASE ON A CIRCULAR DOMAIN

Using the potential of thermoelastic displacements and Love biharmonic function, temperature, displacements and stresses due to the heat source in the semi-infinite body with heat release on a circular domain are determined. Boundary of body is clamped slippery at zero temperature on it or boundary is insulated. These results are applied in the process of investigation of the half-space thermoelastic state with heat release on parallel to his boundary domain.