

## ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИМУШЕНИХ ГАРМОНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ПІРОЕЛЕКТРИКІВ АДАПТИВНИМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Стельмашук В. В.

Львівський національний університет імені Івана Франка, vitstelm@gmail.com

Піроелектрики та п'єзоелектрики все активніше застосовуються у сучасних пристроях, зокрема, різноманітних сенсорах, актуаторах, датчиках тощо. Це зумовлює актуальність досліджень в сфері комп'ютерного моделювання поведінки цих матеріалів за різних умов. Більше того, було б дуже зручно отримувати результати з деякою, наперед заданою, точністю. Тому метою нашого дослідження є побудова чисельної схеми розв'язування задачі про вимушені гармонійні коливання піроелектриків на основі адаптивного методу скінченних елементів.

Ми використовуємо лінійну математичну модель явища піроелектрики, запозичену з [3, 4] і формулюємо початково-крайову задачу згідно з [1, 2]. Цю модель побудовано за припущення, що поведінка піроелектрика в достатній мірі описується вектором пружних зміщень  $\mathbf{u} = \{u_i(x, t)\}_{i=1}^n$ , електричним потенціалом  $p = p(x, t)$  та приростом температури  $\theta = \theta(x, t)$ , які задовольняють систему взаємозв'язаних диференціальних рівнянь руху, електродинаміки та теплопровідності. Розглядатимемо частковий випадок цієї задачі, коли всі навантаження на піроелектрик є гармонійними з деякою круговою частотою  $\omega = \text{const} > 0$  (вимушені коливання піроелектрика). Тоді невідомі будемо шукати у вигляді:  $u_i(x, t) = u_{i1} \cos \omega t + u_{i2} \sin \omega t, i = 1, \dots, n$ ,  $p(x, t) = p_1 \cos \omega t + p_2 \sin \omega t$  та  $\theta(x, t) = \theta_1 \cos \omega t + \theta_2 \sin \omega t$ . У результаті отримуємо таку чисельну схему: знайти  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$  такі, що

$$\begin{bmatrix} \omega \mathbf{A} & -[\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}] & 0 & \mathbf{E}^T & 0 & \mathbf{Y}^T \\ [-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}] & \omega \mathbf{A} & -\mathbf{E}^T & 0 & -\mathbf{Y}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{E} & \omega^{-1} \mathbf{Z} & \varepsilon & 0 & \mathbf{\Pi}^T \\ -\mathbf{E} & 0 & -\varepsilon & \omega^{-1} \mathbf{Z} & -\mathbf{\Pi}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{Y} & 0 & \mathbf{\Pi} & \omega^{-1} \mathbf{K} & \mathbf{S} \\ -\mathbf{Y} & 0 & \mathbf{\Pi} & 0 & -\mathbf{S} & \omega^{-1} \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_1 \\ \omega^{-1} \mathbf{R}_1 \\ \omega^{-1} \mathbf{R}_2 \\ \omega^{-1} \mathbf{F}_1 \\ \omega^{-1} \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Цю схему одержано після формулювання відповідної варіаційної задачі, розділення змінних та застосування стандартної схеми Гальоркіна для дискретизації за просторовою змінною. Тут невідомі  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  є вузловими значеннями амплітуд пружного зміщення, електричного потенціалу та приросту температури відповідно.

Далі схему (1) доповнено апостеріорним оцінювачем похибок отриманих МСЕ-апроксимацій розв'язків і побудовано h-адаптивну схему для розв'язування задачі про вимушені коливання піроелектрика.

Проведено числові експерименти для піроелектричного стрижня та пластини з кераміки PZT-4 під дією різних типів навантажень. Зокрема, показано важливість застосування h-адаптивної схеми у випадку дії на стрижень теплового потоку.

1. *Шинкаренко Г. А.* Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пирозлектричества. I. Постановка задач и анализ установившихся вынужденных колебаний // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 7. – С. 1252-1260.
2. *Chaban F., Shynkarenko H., Stelmashchuk V., Rosinska S.* Numeric modeling of mechanical and electric fields interaction in piezoelectric. // Manufacturing processes. Some problems. Opole: Polit. Opolska, 2012. – Vol. 1, Ch. 9. – P. 107-118.
3. *Tichy J., Erhart J., Kittinger E., Privratska J.* Fundamentals of Piezoelectric Sensorics. Mechanical, Dielectric and Thermodynamical Properties of Piezoelectric Materials. – Berlin:Springer, 2010. – 216 p.
4. *Yang J.* The Mechanics of Piezoelectric Structures. – Singapore: World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 2006. – 312 p.

## **NUMERICAL MODELING OF PYROELECTRICITY FORCED VIBRATIONS PROBLEM USING ADAPTIVE FINITE ELEMENT METHOD**

*Pyroelectrics and piezoelectrics are widely utilized in modern devices. It causes the relevance of computer simulation of their behaviour under different circumstances. Moreover, it is convenient to obtain solution with some preset level of accuracy. The purpose of our research is to construct h-adaptive FEM scheme for solving such kind of problems. Known linear mathematical model of pyroelectricity phenomenon is used. Special case (forced vibrations of pyroelectrics) is considered and problem solutions are assumed to have a special structure. Based on that assumptions, after formulation of corresponding variational problem, variable separation and applying Galerking scheme for discretization by spatial variable, we obtain the numerical scheme for solving the problem. This scheme is then complemented by a posteriori error estimator and finally h-adaptive scheme for pyroelectricity forced vibration problem has been built. Numerical experiments were set for PZT-4 pyroelectric bar and plate under influence of different types of loadings.*