**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014»,
28–30 травня 2014 р., Львів**

УДК 519.7

ЗБІЖНІСТЬ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В СХЕМІ АСИМПТОТИЧНО МАЛОЇ ДИФУЗІЇ

Швець О. І.[1], Чабанюк Я. М.[2]

[1]Національний університет «Львівська політехніка», olja.kiykovska@gmail.com,
[2]Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Неперервна процедура стохастичної апроксимації в ергодичному марковському середовищі в схемі асимптотично малої дифузії [1] визначається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$du^{\varepsilon}(t) = \tag{1}$$

$$= a(t)\left[C(u^{\varepsilon}(t); x(\frac{t}{\varepsilon^3}))dt + \varepsilon^{-1}C_0(u^{\varepsilon}(t); x(\frac{t}{\varepsilon^3}))dt + \varepsilon^{1/2}\sigma(u^{\varepsilon}(t); x(\frac{t}{\varepsilon^3}))dw(t)\right]$$

з початковою умовою $u^{\varepsilon}(0) = u_0,$ де $C(u,x), u \in R^d$ – функція регресії, що залежить від рівномірно ергодичного марковського процесу $x(t), t \geq 0$ у фазовому просторі станів *(X, **X**)*, $C_0(u,x)$ – сингулярне збурення функції регресії, u – випадкова еволюція, w – вінерівський процес, а ε – малий параметр серій [1]. Для генератора Q марковського процессу $x(t), t \geq 0$ зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$ визначений потенціал R_0 [1].

Функції $C(u,x) = \{C_k(u;x), k = 1..d\}$, $C_0(u;x) = \{C_{k0}(u;x), k = 1..d\}$, $\sigma(u;x)$ задовольняють умови існування глобального розв'язку еволюційного рівняння [2]

$$du_x(t) = C(u_x(t); x)dt + \varepsilon^{-1}C_0(u_x(t); x)dt + \varepsilon^{1/2}\sigma(u_x(t); x)dw(t),$$

де $u_x(t)$ – еволюція при фіксованому значенні марковського процесу $x(t), t \geq 0$.

Усереднена функція регресії визначається наступним співвідношенням

$$C(u) = \int_X \pi(dx)C(u;x).$$

Теорема. *Нехай існує функція Ляпунова* $V(u) \in C^5(R^d)$, *для усередненої динамічної системи* $du(t) = C(u(t))dt$, *що забезпечує умову експоненційної стійкості цієї системи [2]*

C 1: $C(u)V'(u) < -cV(u), c > 0,$

та задовольняє додатковим умовам

$C\ 2$: $\left|B(u)V''(u)\right| \le -c_1(1+V(u)), c_1 > 0,$

$C\ 3$: $\left|C_0(u;x)R_0\left[C_0(u;x)V'(u)\right]'\right| \le -c_2(1+V(u)), c_2 > 0,$

$C\ 4$: $\left|C_0(u;x)R_0\left[\tilde{\boldsymbol{L}}_t^{\varepsilon}(x)V(u)\right]\right| \le -c_3(1+V(u)), c_3 > 0,$

$C\ 5$: $\left|C(u;x)R_0\left[C(u;x)V'(u)\right]'\right| \le -c_4(1+V(u)), c_4 > 0,$

$C\ 6$: $\left|\sigma^2(u;x)R_0\left[C_0(u;x)V'(u)\right]''\right| \le -c_5(1+V(u)), c_5 > 0,$

$C\ 7$: $\left|C(u;x)R_0\left[\tilde{\boldsymbol{L}}_t^{\varepsilon}(x)V(u)\right]\right| \le -c_6(1+V(u)), c_6 > 0,$

$C\ 8$: $\left|\sigma^2(u;x)R_0\left[\tilde{\boldsymbol{L}}_t^{\varepsilon}(x)V(u)\right]'\right| \le -c_7(1+V(u)), c_7 > 0,$

де $\tilde{\boldsymbol{L}}_t^{\varepsilon}(x)V(u) = a(t)\tilde{C}(u;x)V'(u) + (1/2)\varepsilon a^2(t)\tilde{B}(u;x)V''(u),$

$\tilde{C}(u;x) = C(u;x) - C(u),\ \tilde{B}(u;x) = \sigma^2(u;x) - B(u),$

$B(u) = \int_X \pi(dx)\sigma^2(u;x).$ *Крім того функції* $C(u;\cdot), C_0(u;\cdot), \sigma(u;\cdot) \in C^2(R^d)$ *та рівномірно обмежені по* $x \in X$, *а* $C_0(u;x)$ *задовольняє умові балансу* $\Pi C_0(u;x) = \int_X \pi(dx)C_0(u;x) = 0.$ *Нормуюча функція* $a(t) > 0$ *задовольняє умови:* $\int_0^\infty a(t)dt = \infty, \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty.$ *Тоді для кожного початкового значення* $u^\varepsilon(0) = u_0 \in R^d$, *розв'язок рівняння (1) при достатньо малих* $\varepsilon \le \varepsilon_0, \varepsilon_0$ *- достатньо мале, збігається з ймовірністю 1 до точки рівноваги* u^*, *що однозначно визначається рівнянням* $C(u^*) = 0$: $\mathrm{P}\left\{\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = u^*\right\} = 1.$

1. *Koroliuk V., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space. - World Scientific Publishing, Singapore, 2005. – 330p.
2. *Кійковська О. І., Чабанюк Я. М.* Збіжність процедури стохастичної апроксимації в схемі асимптотично малої дифузії // Науковий вісник Чернівецького університету. Серія: Математика. – 2012. – Т. 2, № 2-3. – С. 90-95.

CONVERGENCE OF A STOCHASTIC APPROXIMATION PROCEDURE IN ASYMPTOTIC SMALL DIFFUSION SCHEMA

It has been established sufficient conditions for the convergence of a stochastic approximation procedure in the case of diffusive and singular perturbation on the stochastic differential equation in asymptotic small diffusion schema.