Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014», 28–30 травня 2014 р., Львів

УДК 517.95

ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Савка І. Я., Симотюк М. М.

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, s-i@ukr.net, quaternion@ukr.net

У роботі [1] вперше вказано на необхідність розгляду задач спряження, коли на одній частині області задано параболічне рівняння, а на іншій – гіперболічне. Наведено приклад задачі про рух газу по каналу з пористим навколишнім середовищем: рух газу в каналі описувався хвильовим рівнянням, а ззовні – рівнянням дифузії.

Нехай Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $D^p = (-\alpha,\beta)\times\Omega^p$, $\alpha,\beta > 0$, $x = (x_1,\ldots,x_p)\in\Omega^p$, $\Delta_x \equiv \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_p^2$ – оператор Лапласа, $k = (k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$; H_q $(q\in\mathbb{R})$ – простір, отриманий поповненням множини скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum_k \varphi_k\,\mathrm{e}^{i(k,x)}$ за нормою $\|\varphi;H_q\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\left(1+\lambda_k^2\right)^q|\varphi_k|^2\right)^{1/2}$, $\lambda_k = (k_1^2+\ldots+k_p^2)^{1/2}$, $C^n(I;H_q)$ ($n\in\mathbb{Z}_+$, I – відрізок дійсної прямої) – простір функцій $u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)\mathrm{e}^{i(k,x)}$ ($u_k(t)\in C^n(I)$, $k\in\mathbb{Z}^p$) таких, що для кожного фіксованого $t\in I$ похідні $\partial^j u(t,x)/\partial t^j \equiv$ $\equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(j)}(t)\mathrm{e}^{i(k,x)}$, $0\le j\le n$, належать до простору H_q і як елементи цього простору є неперервними за t на I, норму в просторі $C^n(I;H_q)$ задаємо формулою $\|u;C^n(I;H_q)\| = \sum_{j=0}^n \max_{t\in I}\|\partial^j u(t,x)/\partial t^j;H_q\|$.

В циліндричній області D^p розглянемо таку задачу: знайти функцію $u = u(t,x)$, яка справджує умови

$$u\in C^1([-\alpha,\beta];H_q)\cap C^1([0,\beta];H_q)\cap C^2([-\alpha,0];H_q), \qquad (1)$$

$$\begin{cases} u_t - b\Delta_x u = 0, & (t,x) \in D_+^p, \\ u_{tt} - a^2 \Delta_x u = 0, & (t,x) \in D_-^p, \end{cases} \tag{2}$$

$$\left(\nu_1 u + \nu_2 u_t\right)\Big|_{t=-\alpha} - \left(\mu_1 u + \mu_2 u_t\right)\Big|_{t=\beta} = \varphi(x), \quad x \in \Omega^p, \tag{3}$$

де $b > 0,\ a > 0$, $D_-^p = D^p \bigcap \{t < 0\}$, $D_+^p = D^p \bigcap \{t > 0\}$, $\nu_1, \mu_1, \nu_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

Для однієї просторової змінної ($p = 1$) аналогічну задачу спряження в прямокутній області досліджено у роботі [2] для таких двох випадків:
I) $a = b = \nu_1 = \mu_1 = 1$, $\nu_2 = \mu_2 = 0$; II) $a = b = \nu_2 = \mu_2 = 1$, $\nu_1 = \mu_1 = 0$.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ позначимо вираз

$$\Delta_k \equiv \left(\nu_1 - \nu_2 b \lambda_k^2\right)\cos(a\alpha\lambda_k) + \left(\frac{\nu_1 b}{a} + \nu_2 a\right)\lambda_k \sin(a\alpha\lambda_k) - \left(\mu_1 - \mu_2 b\lambda_k^2\right)\mathrm{e}^{-b\beta\lambda_k^2}.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1)-(3) *необхідно і досить, щоб виконувалася умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta_k \neq 0. \tag{4}$$

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (4) *і, крім того, існує така стала* ω, *що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується оцінка*

$$|\Delta_k| \geq \lambda_k^{-\omega}. \tag{5}$$

Якщо $\varphi \in H_{q+\omega+3}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1)-(3), *який неперервно залежить від* $\varphi(x)$.

У роботі встановлено, що майже для всіх (стосовно міри Лебега) чисел $\alpha > 0$ оцінка (5) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

1. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. – 1959. – Т. 3, вып. 3 (87). – С. 3–19.
2. *Юнусова Г. Р.* Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2011. – № 8 (89). – С. 108–117.

CONJUGATION PROBLEM WITH NONLOCAL CONDITION IN THE TIME VARIABLE FOR PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION

The conditions of existence and uniqueness of solution to the problem for parabolic-hyperbolic equation in cylindrical domain are established.