**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014»,
28–30 травня 2014 р., Львів**

УДК 512.643.4

ЦІЛОЧИСЕЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ МАТРИЧНОГО ДІОФАНТОВОГО РІВНЯННЯ НАД КВАДРАТИЧНИМИ КІЛЬЦЯМИ

Ладзоришин Н. Б.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, natalja.ladzoryshyn@gmail.com

Матричні лінійні рівняння різних типів відіграють важливу роль в багатьох задачах теорії керування. Розв'язування матричного лінійного діофантового рівняння

$$AX + BY = C \tag{1}$$

у випадку, коли його коефіцієнти – матриці над полем P, зводиться до розв'язування еквівалентної системи лінійних алгебраїчних рівнянь над полем [1]. Відомо [2], що матричне рівняння (1), в якому A, B, C – матриці над кільцем поліномів $P[x]$, має розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з умов:

а) найбільший спільний лівий дільник матриць A і B є лівим дільником матриці C;

б) матриці $\left\| A \quad B \quad C \right\|$ та $\left\| A \quad B \quad 0 \right\|$ правоеквівалентні.

У працях [2-4] наведено способи розв'язування матричного рівняння (1) з матрицями – коефіцієнтами над кільцем поліномів $P[x]$. У статті [5] на основі стандартної форми пари матриць (A, B) щодо узагальненої еквівалентності запропоновано метод побудови розв'язків такого матричного рівняння над комутативними областями скінченно-породжених головних ідеалів. Ми розглядаємо матричне рівняння (1) над квадратичними кільцями. Зокрема, вказано необхідні і достатні умови існування і єдиності цілочисельного розв'язку цього рівняння.

Нехай $\mathbb{Z}$ – кільце цілих чисел, $k \in \mathbb{Z}, k \neq 1$ і k не ділиться на квадрат жодного простого числа. Тоді $K = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ – квадратичне кільце [6].

Якщо $k \equiv 2,3(\mathrm{mod}\,4)$, тоді K складається з елементів вигляду $a + b\sqrt{k}$, де $a,b \in \mathbb{Z}$; якщо $k \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, тоді елементи кільця мають вигляд $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{k}$, де $a,b \in \mathbb{Z}$ і $a-b$ ділиться на 2.

Розглянемо рівняння (1) у випадку, коли $A,B,C-$ $n \times n$-матриці над квадратичним кільцем K. Тоді матриці A,B,C можна записати у вигляді: $A = A_1 + A_2\sqrt{k};$ $B = B_1 + B_2\sqrt{k};$ $C = C_1 + C_2\sqrt{k},$ якщо $k \equiv 2,3(\mathrm{mod}\,4);$ $A = \frac{1}{2}\left(A_1 + A_2\sqrt{k}\right);$ $B = \frac{1}{2}\left(B_1 + B_2\sqrt{k}\right);$ $C = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\sqrt{k}\right),$ якщо $k \equiv 1(\mathrm{mod}\,4),$ де $A_i, B_i, C_i;$ $i = 1,2-$ $n \times n$-матриці над $\mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Матричне рівняння* (1)*, де* $A,B,C-$ *відомі матриці над квадратичним кільцем* K*, а* X,Y *– невідомі матриці над кільцем цілих чисел* $\mathbb{Z}$*, має розв'язок* X_0,Y_0 *над* $\mathbb{Z}$ *тоді і тільки тоді, коли матриці*

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix} \; i \; \begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{Vmatrix}$$ *еквівалентні.*

Теорема 2. *Нехай матричне рівняння* (1) *над квадратичним кільцем має розв'язок* X_0,Y_0 *над кільцем цілих чисел* $\mathbb{Z}$*. Розв'язок* X_0,Y_0 *єдиний тоді і тільки тоді, коли* $\det\|A_1B_2 - A_2B_1\| \neq 0.$

1. *Lancaster P., Tismenetsky M.* The theory of matrices.– New York: Academic Press, 1985. – 570 p.
2. *Kaczorek T.* Polynomial and Rational Matrices. Applications in Dynamical Systems Theory, Communications and Control Engineering – Springer, Dortrecht, 2007. – 503p.
3. *Kucera V.* Algebraic theory of discrete optimal control for multivariable systems // Kybernetika. – 1974. – 10, №. 1. – P. 3–56.
4. *Tzekis P. A.* A new algorithm for the solution of a polynomial matrix Diophantine equation // Applied Mathematics and Computation. – 2007. – 193 – P. 395 – 407.
5. *Джалюк Н. С., Петричкович В. М.* Матричні діофантові рівняння $AX + BY = C$ // Карпатські математичні публікації. – 2011. – Т. 3, № 2. – С. 49–56.
6. *Родосский К. А.* Алгоритм Евклида. – М.: Наука, 1988. – 240 с.

THE INTEGER SOLUTIONS OF MATRIX DIOPHANTINE EQUATION OVER QUADRATIC RINGS

We considered the matrix Diophantine equation $AX + BY = C$*, where* A,B,C *are* $n \times n$ *matrices with elements in a quadratic rings,* X,Y *are unknown* $n \times n$ *matrices with elements in a ring of integers. The necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution* X_0,Y_0 *over* $\mathbb{Z}$ *are established.*