Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014», 28–30 травня 2014 р., Львів

УДК 517.9

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ЧАСОМ

Кузь А. М.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, kuz.anton87@gmail.com

В області $D^p = \{(t,x) \mid t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^p\}$ розглядається задача про знаходження майже періодичного за x розв'язку задачі

$$N(\partial_t, \partial_x)[u] := \left(L(\partial_x)\partial_t^n + \sum_{j=1}^{n-1} A_j(\partial_x)\partial_t^j \right) u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in D^p, . \quad (1)$$

$$\begin{cases} U_j[u] := \alpha_j \partial_t^{\vartheta_j} u(0,x) + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u(t,x)\,dx = \varphi_j(x), & j \in \{1,\ldots,n_1\}, \\ U_j[u] := \alpha_j \partial_t^{\vartheta_j} u(T,x) + \beta_j \int_0^T t^{r_j} u(t,x)\,dx = \varphi_j(x), & j \in \{n_1+1,\ldots,n\}, \end{cases} . \quad (2)$$

де $n_1 \in \{0,\ldots,n-1\}$, $L(\partial_x) = \sum_{|s|=2d} a_s \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}$, $a_s \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{Z}_+$, – еліптичний диференціальний вираз, $A_j(\partial_x) = \sum_{|s| \le d_j} b_{sj} \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}$, $b_{sj} \in \mathbb{R}, d_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{0,\ldots,n-1\}$, $s = (s_1,\ldots,s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \ne 0$, $\vartheta_j \in \mathbb{Z}_+$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $0 \le \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_{n_1} \le n-1$, $0 \le \vartheta_{n_1+1} < \ldots < \vartheta_n \le$ $\le n-1$, $r_1 < \ldots < r_n$; функції $\varphi_j(x) = \sum_{|k| \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k, x)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, майже періодичні зі заданим спектром $M = \left\{ \mu_k = (\mu_{k_1},\ldots,\mu_{k_p}) \in \mathbb{R}^p, k \in \mathbb{Z}^p \right\}$, $\mu_{-k} = -\mu_k$, $d_1|k|^{\sigma_1} \le |\mu_k| \le d_2|k|^{\sigma_2}$, $0 \le d_1 < d_2$, $0 \le \sigma_1 < \sigma_2$, $(\mu_k, x) =$ $= \mu_{k_1}x_1 + \cdots + \mu_{k_p}x_p$, $|k| = |k_1| + \cdots + |k_p|$, $|\mu_k| = |\mu_{k_1}| + \cdots + |\mu_{k_p}|$.

Задача (1), (2) є, взагалі, умовно корректною, а її розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, для розв'язання якої використано метричний підхід [1]. Позначимо: $f_{qk}(t) := f_q(\mu_k, t)$, $q \in \{1,\ldots,n\}$, – нормальна (в точці $t = 0$) фундаментальна система розв'язків рівняння $N(d/dt, i\mu_k)y(t) = 0$,

$\Delta(\mu_k,T) := \det\left\| U_j[f_{qk}] \right\|_{j,q=1}^{n}$; $A_{M,\gamma}^{\alpha,\beta}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta,\gamma \ge 0$, – простір, отриманий шляхом поповнення простору скінченних тригонометричний поліномів вигляду $v(x) = \sum_{|k| \le N} v_k \exp(i\mu_k, x)$, $N \in \mathbb{N}$, $\mu_k \in M$, за нормою $\left\| v, A_{M,\gamma}^{\alpha,\beta} \right\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} |v_k|^2 (1+|\mu_k|)^{2\alpha} \exp\left(2\beta|\mu_k|^\gamma\right)$; $C^n\left([0,T], A_{M,\gamma}^{\alpha,\beta}\right)$ – простір функцій $u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k, x)$, таких, що при фіксованому $t \in [0,T]$ $d^j u / dt^j \in A_{M,\gamma}^{\alpha,\beta}$, $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, із нормою $\left\| u; C^n\left([0,T], A_{M,\gamma}^{\alpha,\beta}\right) \right\| = \sum_{j=0}^{n} \left\| d^j u / dt^j; A_{M,\gamma}^{\alpha,\beta} \right\|$. Припустимо, що для деякого $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ $d_j > 2d$. Нехай $\chi = \max\limits_{0 \le j \le n-1} \left\{(d_j - 2d)/(n-j)\right\}$, $\rho_j = 0$, якщо $1 \le j \le n_1$, або $\alpha_j = 0$, $n_1 + 1 \le j \le n$, і $\rho_j = \vartheta_j$, якщо $\alpha_j \ne 0$, $n_1 + 1 \le j \le n$.

Теорема 1. *Нехай* $\Delta(\mu_k,T) \ne 0$ *для всіх* $\mu_k \in M$ *та існують сталі* $\eta > 0$ *і* $\theta \ge 0$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in M$ *виконується нерівність*

$$\left|\Delta(\mu_k,T)\right| \ge \left(1+|\mu_k|\right)^\eta \exp(-\theta|\mu_k|^\chi)\,. \qquad (3)$$

Якщо $\varphi_j(x) \in A_{M,\chi}^{w_j+\alpha,\, q+\beta}$, $w_j = \eta + \chi\left((n+1)(n+2)/2 + \rho - \rho_j\right)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $q = \theta + (n-1)T$, *то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) із простору* $C^n\left([0,T], A_{M,\chi}^{\alpha,\beta}\right)$, *який неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$.

Знайдено сталі η і θ, для яких нерівність (3) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in [0,H], H > 0$. Виділено випадки задачі (1), (2), у яких відсутня проблема малих знаменників.

1. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR EQUATION, UNSOLVED FOR HIGHEST DERIVATIVE WITH RESPECT TO TIME

We investigate the problem with integral conditions with respect to the time variable for equations unsolved for highest derivative with respect to the time with constant coefficients in a class of functions, almost periodic for spatial variables. A criterion of uniqueness and the sufficient conditions of existence of the solution to the problem are established.

http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2014/