**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014»,
28–30 травня 2014 р., Львів**

УДК 517.9:539.3

МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ В ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ ІЗ ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ У ВИПАДКУ ЗМІШАНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ

Грицько Б. Є.

Львівський національний університет імені Івана Франка, bgrytsko@gmail.com

Нехай $\Omega_+ \subset R^2$ деяка обмежена однозв'язна область з ліпшицевою межею Σ. $\overline{\Omega}_+ = \Omega_+ \cup \Sigma$. S – розімкнута двостороння ліпшицева крива з кінцями c_1 та c_2, $\overline{S} = S \cup \{c_1, c_2\}$, з допомогою якої моделюємо тонке включення в області Ω_+. Вважаємо, що $\overline{S} \subset \Omega_+$. Позначимо $\Omega = \Omega_+ \setminus \overline{S}$, $[\gamma_{i,S}] = \gamma_{i,S}^+ - \gamma_{i,S}^-$, $i = 0,1$, де $\gamma_{0,S}^{\pm} u$ – граничне значення функції u з різних сторін S, а $\gamma_{1,S}^{\pm} u$ – граничне значення нормальної похідної.

В залежності від неперервності температури або теплових потоків при переході через включення S розглядаємо наступні задачі.

Задача I : знайти функцію $u \in H^1(\Omega, L) = \{u \in H^1(\Omega) : Lu \in L_2(\Omega)\}$ таку, що

$$Lu = -\Delta u = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$[\gamma_{0,S}]u = 0, \quad [\gamma_{1,S} u] + \lambda \gamma_{0,S}^+ u = f, \quad \lambda \in C(\overline{S}), \qquad f \in H_{00}^{-1/2}(S)$$

$$\gamma_{0,\Sigma}^+ u = g, \qquad g \in H^{1/2}(\Sigma).$$

Позначимо $Q(x,y) = \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x-y|}$. Для функції $u \in H^1(\Omega, L)$, яка є розв'язком задачі I, вірне наступне інтегральне подання:

$$u(x) = V\tau(x) + V_\Sigma \mu(x), \quad \text{де } \tau = [\gamma_{1,S}]u \text{ та } \mu = [\gamma_{1,\Sigma}]u, \tag{1}$$

$$V\tau(x) = \int_S Q(x,y)\tau(y)ds_y, \qquad V_\Sigma \mu(x) = \int_\Sigma Q(x,y)\mu(y)ds_y.$$

Використавши граничні умови задачі I, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \tau + \lambda K\tau + \gamma_{0,S}^+ V_\Sigma \mu = f, \\ \gamma_{0,\Sigma}^+ V\tau + K_\Sigma \mu = g, \end{cases} \tag{2}$$

де $K\tau = \gamma_{0,S}^+ V\tau$ та $K_\Sigma \tau = \gamma_{0,\Sigma}^+ V_\Sigma \tau$ – інтегральні оператори з логарифмічною особливістю, визначені на S та Σ відповідно.

Теорема 1. Задача I є еквівалентною системі (2), тобто розв'язок задачі I має вигляд (1), де τ та μ є розв'язками системи (2), і навпаки, функція $u(x)$, що задана виразом (1), де τ та μ – розв'язки системи (2), є розв'язком задачі I.

Задача M : знайти функцію $u \in H^1(\Omega, L)$ таку, що

$$Lu = -\Delta u = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$[\gamma_{1,S}]u = 0, \quad \lambda[\gamma_{0,S}u] + \gamma_{1,S}^{+}u = f, \; \lambda \in C(\bar{S}), \qquad f \in H^{-1/2}(S)$$

$$\gamma_{0,\Sigma}^{+}u = g, \qquad g \in H^{1/2}(\Sigma).$$

Для функції $u \in H^1(\Omega, L)$, яка є розв'язком задачі M, вірно:

$$u(x) = W\tau(x) + V_\Sigma\mu(x), \text{ де } \tau = [\gamma_{0,S}]u \text{ та } \mu = [\gamma_{1,\Sigma}]u,$$

$$W\tau(x) = \int_S \frac{\partial Q(x,y)}{\partial n_y}\tau(y)ds_y, \qquad V_\Sigma\mu(x) = \int_\Sigma Q(x,y)\mu(y)ds_y.$$

Використавши граничні умови задачі M, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda\tau + H\tau + \gamma_{1,S}^{+}V_\Sigma\mu = f, \\ \gamma_{0,\Sigma}^{+}W\tau + K_\Sigma\mu = g, \end{cases} \tag{3}$$

де $H\tau = \gamma_{1,S}^{+}W\tau$ – інтегродиференціальний оператор із сингулярною особливістю, визначений на S, а $K_\Sigma\mu = \gamma_{0,\Sigma}^{+}V_\Sigma\mu$ – інтегральний оператор з логарифмічною особливістю, визначений на Σ.

Теорема 2. Задача M є еквівалентною системі (3).

Теорема 3. Якщо $\lambda \in C(\bar{S})$, $\lambda(x) > 0, x \in \bar{S}$, то задачі I та M з однорідними граничними умовами мають лише тривіальний розв'язок.

Для наближеного розв'язування систем рівнянь (2) та (3) застосовано метод колокації з використанням в якості базисних функцій граничних елементів по кривих S та Σ. Розглянуто модельні та практичні задачі для тонких включень складної конфігурації.

MODELING OF STATIONARY TWO-DIMENSIONAL HEAT FIELDS IN DOMAINS WITH THIN INCLUSIONS IN CASE OF MIXED BOUNDARY CONDITIONS

We consider boundary value problems with two different types of mixed boundary conditions given on the thin inclusion. We reduce initial boundary value problems to the equivalent systems of integral equations and prove uniqueness of their solutions.