**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014»,
28–30 травня 2014 р., Львів**

УДК 517.53

ЗРОСТАННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ В ТЕРМІНАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ТИПІВ

Глова Т. Я.[1], Філевич П. В.[2]

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача,
hlova_taras@ukr.net
[2]Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника,
filevych@mail.ru

Нехай $A\in(0,+\infty]$, $R\in(0,+\infty]$, $D_R=\{z\in\mathbb{C}:|z|<R\}$, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Через Ω_A позначимо клас опуклих на $(-\infty,A)$ функцій Φ, що є необмеженими зверху на вказаному інтервалі разом зі своєю правосторонньою похідною Φ'_+.

Розглянемо довільну аналітичну в крузі D_R функцію f вигляду

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n. \qquad (1)$$

Для всіх $r\in(0,R)$ максимум модуля і максимальний член функції f визначаємо відповідно за рівностями

$$M(r,f)=\max\{|f(z)|:|z|=r\},\ \mu(r,f)=\max\{|a_n|r^n:n\in\mathbb{N}_0\}.$$

Позначимо через $\mathcal{H}_R$ клас аналітичних у крузі D_R функцій f вигляду (1). Величину

$$T_\Phi=\varlimsup_{r\to R}\frac{\ln M(r,f)}{\Phi(\ln r)},$$

де $\Phi\in\Omega_{\ln R}$, називатимемо Φ-типом функції $f\in\mathcal{H}_R$. Покладемо також

$$t_\Phi=\varlimsup_{r\to R}\frac{\ln\mu(r,f)}{\Phi(\ln r)},\qquad \Delta_\Phi=\varlimsup_{x\to\ln R}\frac{\ln\Phi'_+(x)}{\Phi(x)}.$$

Через $\mathcal{F}_R$ позначимо клас відображень $F:\mathcal{H}_R \to [0,+\infty]$ таких, що $F(f)=F(g)$ для довільних функцій $f,g\in\mathcal{H}_R$, послідовності модулів степеневих розвинень яких співпадають.

Теорема 1. *Нехай* $R\in(0,+\infty]$, $\Phi\in\Omega_{\ln R}$. *Якщо* $\Delta_\Phi=0$, *то* $T_\Phi(f)=t_\Phi(f)$ *для кожної* $f\in\mathcal{H}_R$, *зокрема,* $T_\Phi\in\mathcal{F}_R$.

Теорема 2. *Нехай* $R\in(0,+\infty]$, $\Phi\in\Omega_{\ln R}$. *Якщо* $\Delta_\Phi>0$, *то* $T_\Phi\notin\mathcal{F}_R$.

Для функції $\Phi\in\Omega_A$ нехай $\tilde{\Phi}(x)=\sup\{xt-\Phi(t):t\in(-\infty,A)\}$ – спряжена за Юнгом функція, а $h_\Phi(x)=\tilde{\Phi}(x)/x$. Тоді h_Φ є неперервною зростаючою до A на $(a_0,+\infty)$ функцією, а тому обернена функція h_Φ^{-1} є зростаючою до $+\infty$ на (A_0,A). Якщо $x\in[A,+\infty]$, то для визначеності приймемо $h_\Phi^{-1}(x)=+\infty$.

Використовуючи теорему 1, легко довести, що у випадку, коли для функції $\Phi\in\Omega_{\ln R}$ виконується умова $\Delta_\Phi=0$, Φ-тип кожної функції $f\in\mathcal{H}_R$ вигляду (1) можна обчислити за формулою

$$T_\Phi(f)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{h_\Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)}. \qquad (2)$$

Якщо $f\in\mathcal{H}_{+\infty}$ і $\Phi(x)=\exp(\rho x)$, де $\rho>0$, то формула (2) збігається з класичною формулою Коші-Адамара для обчислення типу цілої функції за послідовністю $(|a_n|)$ модулів коефіцієнтів її степеневого розвинення.

У випадку, коли для функції $\Phi\in\Omega_{\ln R}$ умова $\Delta_\Phi=0$ не виконується, формула (2) неправильна. Більше того, з теореми 2 випливає, що у цьому випадку не існує жодної формули, за якою Φ-тип кожної функції $f\in\mathcal{H}_R$ вигляду (1) можна було б визначити за послідовністю $(|a_n|)$.

THE GROWTH OF ANALYTIC FUNCTIONS IN THE TERMS OF GENERALIZED TYPES

We established necessary and sufficient conditions under which the generalized type of each function f*, analytic in the disk of radius* $R\in(0,+\infty]$*, can be calculated by the formula of Cauchy-Hadamard type.*