

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРНОГО ВЗАЄМОВПЛИВУ ШАРІВ НА УСЕРЕДНЕНИЙ ДИФУЗІЙНИЙ ПОТІК У ДВОФАЗНІЙ ШАРУВАТІЙ СМУЗІ

Давидок А. Є.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ;  
Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
e-mail: davydoka@gmail.com

Під час дослідження дифузійних потоків домішки у випадково неоднорідних шаруватих структурах використовують процедуру усереднення за ансамблем конфігурацій фаз, що викликає значні труднощі, оскільки функції кореляції градієнта випадкового поля концентрації та стохастичного коефіцієнта дифузії є невідомими. В праці [1] було виведено рівняння дифузії для функції потоку маси, і запропоновано формулювати крайові задачі дифузії безпосередньо для потоку. За таким підходом у даній роботі досліджено дифузію домішки у двофазній випадково неоднорідній смузі товщини  $z_0$  з рівномірним розподілом фаз.

Рівняння дифузії для функції потоку  $J(z, t)$  в одновимірному за просторовою координатою випадку є наступним [1]:

$$\frac{\partial J(z, t)}{\partial t} = D(z) \frac{\partial^2 J(z, t)}{\partial z^2}, \quad (1)$$

де  $D(z)$  – випадковий коефіцієнт дифузії, що набуває значень  $D_0$  та  $D_1$ , якщо біжуча точка потрапляє відповідно у фазу матриці та фазу включення.

Прийнято наступні крайові умови:

$$J(z, t)|_{t=0} = 0; \quad J(z, t)|_{z=0} = J^* \equiv const, \quad c(z, t)|_{z=z_0} = 0. \quad (2)$$

Зауважимо, що з метою уникнення фізично некоректних результатів, наприклад, надходження в обмежене тіло необмеженої кількості речовини, крайову умову  $z = z_0$  задано для функції концентрації домішки  $c(z, t)$ .

Трактуючи неоднорідність структури тіла як внутрішні джерела, крайову задачу (1)-(2) зведено до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння, що є сумою розв'язку однорідної крайової задачі та згортки функції Гріна з джерелом. Розв'язок цього рівняння знайдено методом послідовних ітерацій у вигляді ряду Неймана. Обмежившись трьома першими членами ряду, знайдено

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014»,  
28–30 травня 2014 р., Львів**

формулу для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз потоку домішки у двофазній випадково неоднорідній смузі за рівномірного розподілу включень

$$\begin{aligned}
 \langle J(z, t) \rangle_{conf} = & J_0(z, t) + (D_1 - D_0) \int_0^t \left[ \frac{v_1}{h} \int_0^h z' G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' + \right. \\
 & \left. + v_1 \int_h^{z_0} G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' \right] dt' + (D_1 - D_0)^2 \int_0^t \left[ \frac{v_1^2}{h^2} \int_0^h z' G(z, z', t, t') \int_0^t \left( \int_0^h z'' \frac{\partial^2 G(z', z'', t', t'')}{\partial z'^2} \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \frac{\partial^2 J_0(z'', t'')}{\partial z''^2} dz'' + h \int_h^{z_0} \frac{\partial^2 G(z', z'', t', t'')}{\partial z'^2} \frac{\partial^2 J_0(z'', t'')}{\partial z''^2} dz'' \right) dt'' dz' + \int_h^{z_0} G(z, z', t, t') \int_0^t \left( \frac{v_1^2}{h} \int_0^h z'' \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \frac{\partial^2 G(z', z'', t', t'')}{\partial z'^2} \frac{\partial^2 J_0(z'', t'')}{\partial z''^2} dz'' + v_1^2 \int_h^{z_0} \frac{\partial^2 G(z', z'', t', t'')}{\partial z'^2} \frac{\partial^2 J_0(z'', t'')}{\partial z''^2} dz'' \right) dt'' dz' \right] dt' + \\
 & + (D_1 - D_0)^2 \frac{v_1^2}{h^2} \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 G(z', z'', t', t'')}{\partial z'^2} \frac{\partial^2 J_0(z'', t'')}{\partial z''^2} dz'' dt'' dz' dt'. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Тут  $J_0(z, t)$  – розв’язок однорідної крайової задачі,  $G(z, z', t, t')$  – детермінована функція Гріна,  $h$  – характерна товщина включень.

На основі формули (3) знайдено розрахункові формули для усередненого дифузійного потоку. Досліджено залежність усередненого потоку маси від характеристик середовища.

Зазначимо, що врахування третього доданку ряду Неймана дозволило дослідити парний взаємовплив підшарів, з яких складається тіло, на поведінку усередненого потоку маси.

1. Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю., Давидок А. Є. Математичне моделювання дифузійних потоків у випадково неоднорідній шаруватій смузі // Доповіді НАН України. – 2012. – № 11 – С. 40–46.

**ANALYSIS OF THE LAYER COUPLING EFFECT ON THE AVERAGED  
DIFFUSIVE FLOW IN A TWO-PHASE STRATIFIED STRIP**

*An admixture diffusion flow is investigated in a two-phase randomly nonhomogeneous strip. The initial boundary-value problem is formulated for the mass flow. The calculating formulae are obtained for diffusion flow averaged over the ensemble of phase configurations taking into account the third term of Neumann series. This allows us to investigate the layer coupling effects.*