Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014», 28–30 травня 2014 р., Львів

УДК 519.6

АНАЛІЗ ЗБІЖНОСТІ НАПІВДИСКРЕТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Чир І. А.

Львівський національний університет імені Івана Франка, ivan.chyr@plast.org.ua

У дослідженні розглядається початково-крайова задача для системи рівнянь динамічної термопружності Гріна-Ліндсея [1] з невідомими зміщеннями та температурою, яку можна описати наступним чином. Нехай пружне тіло, що займає обмежену зв’язну область Ω точок $x=\left(x_1,...,x_d\right)$ d-мірного евклідового простору $\Re^d$ (де $d=2$ *або* 3) з неперервною за Ліпшицем границею Γ, деформується з плином часу $t\in\left[0,T\right]$, $0<T\le+\infty$ під дією об’ємних сил $f\left(x,t\right)=\left(f_1\left(x,t\right),...,f_d\left(x,t\right)\right)$, поверхневих навантажень $\widehat{\sigma}\left(x,t\right)=\left(\widehat{\sigma}_1\left(x,t\right),...,\widehat{\sigma}_d\left(x,t\right)\right)$ та розподілених джерел тепла з інтенсивністю $w(x,t)$. Для дослідження закономірностей деформування таких тіл достатньо визначити приріст температури $\theta(x,t)$ відносно початкової температури T_0 та вектор пружних зміщень $u\left(x,t\right)=\left(u_1\left(x,t\right),...,u_d\left(x,t\right)\right)$, які (в лінійному наближенні) задовольняють рівнянням руху

$$\rho(u_i''-f_i)-\sigma_{ji,j}=0 \qquad \text{в } \Omega\times\left(0,T\right], \tag{1}$$

теплопровідності,

$$\rho c_E(\theta+t_0\theta')'+q_{i,i}+T_0\gamma_{ij}\varepsilon_{ij}(u')=w \qquad \text{в } \Omega\times\left(0,T\right], \tag{2}$$

рівнянням стану

$$\begin{cases}\sigma_{ji}(u,\theta+t_1\theta')=c_{ijkm}\varepsilon_{km}(u)-\gamma_{ij}(\theta+t_1\theta')+a_{ijkm}\varepsilon_{km}(u'),\\ q_i(\theta)=-\lambda_{ij}\theta_{,j}, \qquad \text{в } \Omega\times\left(0,T\right],\\ L_m=1+t_m\frac{\partial}{\partial t},\ m=0,1,\end{cases} \tag{3}$$

співвідношенням Коші

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(u)=\tfrac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \text{ в } \Omega\times\left(0,T\right], \tag{4}$$

а також крайовим

$$\begin{cases} u_i = 0 & \text{на } \Gamma_u \times [0,T],\ \Gamma_u \subset \Gamma,\ mes(\Gamma_u) > 0 \\ \sigma_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i & \text{на } \Gamma_\sigma \times [0,T],\ \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u \\ \theta = 0 & \text{на } \Gamma_\theta \times [0,T],\ \Gamma_\theta \subset \Gamma,\ mes(\Gamma_\theta) > 0 \\ q_i n_i = 0 & \text{на } \Gamma_h \times [0,T],\ \Gamma_h = \Gamma \setminus \Gamma_\theta \end{cases} \tag{5}$$

і початковим умовам

$$u\big|_{t=0} = u_0, \quad u'\big|_{t=0} = v_0, \quad \theta\big|_{t=0} = \theta_0, \quad \theta'\big|_{t=0} = \pi_0 \qquad \text{в } \Omega. \tag{6}$$

Для моделі (1)-(6) було побудовано варіаційну задачу, досліджено властивості її складових та, на основні енергетичного підходу, було доведено обмеженість та єдність її розв’язку. Застосовуючи метод Гальоркіна, була проведена її напівдискретизація за просторовими змінними. Після подальшого дослідження було встановлено існування і єдність розв’язку напівдискретної задачі та його обмеженість. Це в подальшому дало змогу довести коректність не дискретизованої варіаційної задачі [2].

Основним ж досягненням актуального дослідження було встановлення умов збіжності напівдискретних апроксимацій методу скінченних елементів для задачі (1)-(6). Це було зроблено на основі рівняння балансу енергії та побудови належних апріорних оцінок.

1. *Ignaczak J., Ostoja-Starzewski M.* Thermoelasticity with Finite Wave Speeds. – Oxford Univ. Pres., 2009. – 432 p.
2. *Чир І. А.* Задача динамічної термопружності та властивості її варіаційної постановки / Матеріали конф. СППМІ 2014 – Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. – 149-150 с.
3. *Шинкаренко Г. А.* Проекційно-сіткові схеми розв’язування початково-крайових задач. – Київ: НМКВО, 1991. – 88 с.

CONVERGENCE ANALYSIS OF SEMI-DISCRETE FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS FOR THE DYNAMIC THERMOELASTICITY PROBLEM

This paper considers initial-boundary value problem for dynamic thermoelasticity in form, proposed by Green and Lindsay with two relaxation parameters. We continue previous research that showed well-posedness of obtained variational formulation. Utilizing energy equations and energy inequalities from previous research, convergence of semi-discrete approximations was proved.