

## ДИНАМІЧНІ НАПРУЖЕННЯ У БЕЗМЕЖНІЙ ПРУЖНІЙ МАТРИЦІ З ОДНОПЕРІОДИЧНИМ МАСИВОМ ПОДАТЛИВИХ ДИСКОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Бутрак І. О., Жбадинський І. Я.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН  
України, Львів, Наукова 3б, zhbadytskyi.igor@gmail.com

Для теоретичного аналізу блокування і локалізації хвиль у тілах з множинними тонкостінними або дисковими включеннями доцільно розглядати спрощені моделі пружних середовищ з періодичними дефектами [1]. Такі дослідження мають практичну цінність з точки зору опису властивостей фононних кристалів [2], зацікавленість якими за останні роки стрімко зростає. Нижче метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР) застосовано для вивчення взаємодії дискових включень малої жорсткості періодичного масиву за падіння на нього плоскої поздовжньої хвилі.

Розглянемо безмежну пружну матрицю з модулем зсуву  $G$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu$ , в площині  $x_3 = 0$  якої розташовано однопериодичний масив податливих дискових включень  $S_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) з однаковими товщинами  $h$ , радіусами  $a$ , модулями зсуву  $G_0$  та коефіцієнтами Пуассона  $\nu_0$ . Центри включень розташовані з періодичністю  $d$  на осі  $Ox_2$ . Припускаємо, що включення перебувають в умовах ідеального механічного контакту з матрицею, тобто забезпечується неперервність переміщень та напружень при перетині міжфазних поверхонь.

В композиті поширюється гармонічна пружна плоска поздовжня хвиля з перпендикулярним до площини розташування неоднорідностей вектором переміщень  $\mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x})$  та циклічною частотою коливань  $\omega$ . Така хвиля викликає в площині дефектів тільки нормальні напруження  $\sigma_{33}^{\text{in}}(\mathbf{x})$ . Тут і надалі розглядаються лише амплітудні значення величин хвильового процесу, оскільки загальний експоненціальний множник  $\exp(-i\omega t)$ , де  $t$  – час,  $i = \sqrt{-1}$ , вилучається з розв'язку.

Наявність в просторі множинних розсіювачів спричинює суперпозиційне хвильове поле, переміщення в якому  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  подається у вигляді:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_k(\mathbf{x}), \quad (1)$$

де  $\mathbf{u}_k$  – невідомі переміщення в розсіяних включеннями хвилях. Всі складові у співвідношеннях (1) повинні задовільняти дифракційні рівняння руху у випадку стаціонарних коливань [1].

За аналогічними співвідношенням (1) суперпозиційними формулами, визначаються загальні напруження в тілі. Керуючись періодичністю розташування дефектів, враховуючи теорію Блоха про поширення хвиль у пружному середовищі [1] та задовільнивши граничні умови в області розташування одного з включень масиву, задачу зведено до наступного ГР, заданого в обмеженій області  $S_0$ , відносно функції розкриття  $\Delta \mathbf{u}_3$ :

$$f \Delta \mathbf{u}_3(\mathbf{x}) - \frac{4G}{k^2} \iint_{S_0} \Delta \mathbf{u}_3(\boldsymbol{\eta}) [R(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|) - L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})] dS_0 = \boldsymbol{\sigma}_{33}^{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_0. \quad (2)$$

Тут коефіцієнт  $f$  задається співвідношенням параметрів включення, особливість потенціалу Гельмгольца присутня в ядрі  $R$ . Регулярне ядро  $L$ , що містить періодичну функцію Гріна напружень [1], описує взаємодію включення з іншими дефектами масиву.

За результатами числового розв'язання рівняння (2) для різних відстаней між дефектами, визначено залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень від безрозмірного хвильового числа.

1. Zhang Ch., Gross D. On wave propagation in elastic solids with cracks. – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1998. – 260 p.
2. Pennec Y., Vasseur J. O., Rouhani B. D., Dubrzynski L., Deymier P.A. Two-dimensional phononic crystals: Examples and applications // Surface Science Reports. – 2010. – № 65 – P. 229 – 291.

## **DYNAMIC STRESSES IN THE INFINITE MATRIX WITH SINGLE-PERIODICAL ARRAY OF COMPLIANT DISK INCLUSIONS**

*The symmetric problem of time-harmonic elastic wave interaction with a periodic array of coplanar compliant disk inclusions embedded in an infinite elastic matrix is numerically investigated. By using the superposition principle and the conjunction of boundary conditions on multiple-connected space domain with natural symmetry conditions due to the problem periodicity, the boundary integral equation is formulated without any strong restrictions on the distance between the scatterers and the frequency range. Numerical results for the mode-I dynamic stress intensity factor are presented and discussed to show its variation with the dimensionless wave number and the distance between the inclusions.*