**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014»,
28–30 травня 2014 р., Львів**

УДК 517.519: 517.96

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ДИСИПАТИВНИХ СТРУКТУР В МОДЕЛІ БРЮССЕЛЯТОР ІЗ СУПЕРДИФУЗІЄЮ

Бойко З. В.[1], Мелешко В. В.[1], Максимів Ю. І.[2]

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, zoya-7@mail.ru, vitmel@ukr.net;
[2]Національний університет «Львівська політехніка», maksymiv.yulya@gmail.com

Системи реакції-дифузії становлять значний інтерес при дослідженні нерівноважних явищ упродовж кількох останніх десятиліть. За допомогою математичного моделювання таких систем пояснено багато нелінійних явищ у фізичних, біологічних та хімічних середовищах, зокрема, поширення імпульсів у нервовому волокні та серцевому м’язі, складні імунні біохімічні реакції в живих організмах, утворення складних просторово-неоднорідних розподілів концентрацій реагентів у хімічних реакціях. Експериментальні дослідження спіральних хвиль, просторових дисипативних структур із складною симетрією, а також виникнення хаотичної динаміки в хімічних та біологічних системах призвели до того, що системи реакції-дифузії стали предметом інтенсивних сучасних досліджень. Разом з тим, середовища, в яких дифузійні процеси мають аномальну природу, не можуть бути описані в рамках класичних моделей реакції-дифузії. Дослідження останніх років показали, що явища у фрактальних, пористих, в’язких середовищах, краще можуть бути описані за допомогою математичних моделей з дробовими похідними.

У цій роботі отримано та проаналізовано розв’язки в моделі Брюсселятор із супердифузією. Дана модель узагальнює одну з найбільш відомих базових моделей реакції-дифузії, в якій класичні просторові диференціальні оператори замінені їх дробовими аналогами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \Delta^{\alpha} u + A - (B+1)u + u^2 v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = D_2 \Delta^{\alpha} v + Bu - u^2 v, \qquad (1)$$

де u, v – залежні змінні системи; D_1, D_2 – коефіцієнти дифузії; A, B – зовнішні біфуркаційні параметри; α – порядок дробової похідної ($1 < \alpha < 2$).

Систему рівнянь (1) доповнюємо відповідними початковими та граничними умовами.

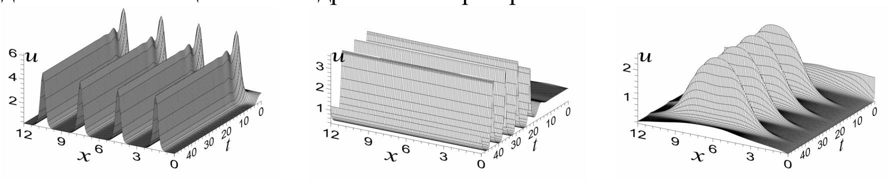
У роботі чисельно отримано розв’язки сформульованої задачі для чотирьох випадків, а саме, коли в якості дробових операторів використано ліву та праву дробові похідні в сенсі Рімана-Ліувілля [1]:

$$D_{+}^{\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{u(\xi,t)}{(x-\xi)^{\alpha-1}}d\xi,\ D_{-}^{\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_{x}^{\infty}\frac{u(\xi,t)}{(\xi-x)^{\alpha-1}}d\xi;$$

коли оператор супердифузії дорівнює півсумі лівої $D_{+}^{\alpha}u$ та правої $D_{-}^{\alpha}u$ похідних, а також, коли дробовий оператор для задачі має вигляд потенціалу Рісса [2]:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}=-\frac{1}{2\cos(\pi\alpha/2)}\left(D_{+}^{\alpha}u+D_{-}^{\alpha}u\right). \qquad (2)$$

Досліджено умови нестійкості просторово-однорідних станів системи (1) та нелінійну динаміку розв’язків, які виникають внаслідок біфуркації таких станів для описаних вище означень дробових операторів.



а) *б*) *в*)

Рис. 1. Динаміка змінної u системи (1) при параметрах $D_2=1,\ A=1,\ B=3$ та *а*) $\alpha=2, D_1=0.04$; *б*) $\alpha=2, D_1=1$ *в*) $\alpha=1.5, D_1=1$.

Встановлено, що в граничному випадку ($\alpha\to 2$) нелінійна динаміка системи є практично еквівалентною для всіх означень дробових операторів (рис. 1, а, б). У випадку, коли рівень аномальності дифузії ($\alpha<2$) є суттєвим, в системі виникають нові типи динаміки, які якісно відрізняються для всіх згаданих форм дробових операторів (рис 1, в).

1. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. – Academic Press, San Diego, 1999. – 340 p
2. *Golovin A. A., Matkowsky B. J., and Volpert V. A.* Turing pattern formation in the Brusselator model with superdiffusion // J. Appl. Math. – 2008. – Vol. 69, No. 1. – P. 251-272.

NUMERICAL INVESTIGATION OF DISSIPATIVE STRUCTURES DYNAMICS IN THE BRUSSELATOR MODEL WITH SUPERDIFFUSION

Based on the numerical simulation we analyzed the dynamics of dissipative structures in the Brusselator model with superdiffusion.