УДК 517.9

ПОБУДОВА ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ СОЛІТОНІВ МЕТОДОМ ПРОЕКТУВАННЯ

Чвартацький О.І.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
alex.chvartatskyy@gmail.com

Рівняння Бюргерса

$$u_{t_2} - u_{xx} - 2uu_x = 0 \tag{1}$$

є однією із найвідоміших моделей, яка допускає лінеаризацію при відповідній заміні змінних. А саме, рівняння (1) можна звести до рівняння теплопровідності

$$\varphi_{t_2} = \varphi_{xx} \tag{2}$$

за допомогою підстановки Хопфа-Коула

$$u = \frac{\varphi_x}{\varphi}. \tag{3}$$

В рівняннях (1)-(3) і надалі нижні індекси при функціях позначають диференціювання по відповідних змінних: $u_{t_2} := \frac{\partial u}{\partial t_2}$, $u_x := \frac{\partial u}{\partial x}$ і т.д. Різноманітні (матричні, просторові) узагальнення рівняння Бюргерса цікаві як з точки зору фізичних застосувань [1], так і своїм тісним зв'язком з нелінійними моделями, інтегровними методом оберненої задачі.

Рівняння (1) можна природнім чином узагальнити, використовуючи підстановку (3). А саме, нехай L_0 — матричний лінійний диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами, а ($N \times N$)-матрична функція φ є розв'язком лінійного рівняння:

$$L_0\{\varphi\} = 0. \tag{4}$$

Тоді функції

$$\Phi = \varphi_x \varphi^{-1},\ \tilde{\Phi} = \varphi^{-1}\varphi_x, \tag{5}$$

будуть розв'язками нелінійних рівнянь:

$$L\{\Phi\} = 0,\ \tilde{L}\{\tilde{\Phi}\} = 0, \tag{6}$$

де L та $\tilde{L}$ — деякі нелінійні диференціальні оператори.

Означення. Рівняння вигляду (6), які допускають лінеаризацію (4) за допомогою матричних узагальнень (5) підстановки Хопфа-Коула (6), ми називатимемо рівняннями типу Бюргерса.

В роботах [2,3] рівняння типу Бюргерса використовувались для побудови розв'язків рівняння Кадомцева-Петвіашвілі (KP), системи Деві-Стюартсона (DS) та інших інтегровних моделей теорії солітонів. Наступні твердження показують зв'язок між рівняннями типу Бюргерса та матричним узагальненням рівняння KP у потенціальній формі, а також дають змогу використати операцію проектування для отримання N-солітонних розв'язків скалярного потенціального рівняння KP.

Твердження 1. [1] Нехай $(N\times N)$-матрична функція Φ задовольняє систему рівнянь типу Бюргерса:

$$\begin{cases} \alpha_2\Phi_{t_2} - \Phi_{xx} - 2\Phi_x\Phi = 0, \\ \alpha_3\Phi_{t_3} - \Phi_{xxx} - 3\Phi_{xx}\Phi - 3\Phi_x^2 - 3\Phi_x\Phi^2 = 0. \end{cases} \quad \alpha_2 \in \mathbb{R}\cup i\mathbb{R}, \alpha_3 \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Тоді функція Φ є розв'язком матричного рівняння Кадомцева-Петвіашвілі у потенціальній формі:

$$\left(\alpha_3\Phi_{t_3} - \frac{1}{4}\Phi_{xxx} - \frac{3}{2}\Phi_x^2\right)_x - \frac{3}{4}\alpha_2^2\Phi_{t_2t_2} + \frac{3}{2}\alpha_2\left[\Phi_x, \Phi_{t_2}\right] = 0. \tag{8}$$

Твердження 2. [1] Нехай $\hat{\varphi} = W[\varphi_1,\ldots,\varphi_N]$ — $(Nk\times Nk)$-матриця Вронського, побудована по $(k\times k)$-матричних функціях φ_1, …, φ_N. Тоді функція $\Phi = \hat{\varphi}_x\hat{\varphi}^{-1}$ має такий вигляд:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & I_k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I_k \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \ldots & \Phi_N \end{pmatrix}, \tag{9}$$

де I_k - одиничні матриці розмірності $k\times k$. Φ_j — $(k\times k)$-матричні функції. У випадку $k=1$ функції Φ_1, Φ_N мають вигляд:

$$\Phi_1 = (-1)^{N-1}\frac{\det(\hat{\varphi}_x)}{\det\hat{\varphi}}, \Phi_N = \frac{(\det\hat{\varphi})_x}{\det\hat{\varphi}}.$$

Використавши твердження 1 та 2 ми отримуємо для скалярного потенціального рівняння Кадомцева-Петвіашвілі

$$\left(\alpha_3 v_{t_3} - \frac{1}{4}v_{xxx} - \frac{3}{2}v_x^2\right)_x = \frac{3}{4}\alpha_2^2 v_{t_2t_2} \tag{10}$$

розв’язок вигляду $v = \Phi_N = \dfrac{(\det \hat{\varphi})_x}{\det \hat{\varphi}}$, де $\hat{\varphi}$ — матриця Вронського, побудована по скалярних функціях φ_j, $j = \overline{1, N}$, що є розв’язками систем

$$\begin{cases} \alpha_2 \varphi_{jt_2} = \varphi_{jxx}, \\ \alpha_3 \varphi_{jt_3} = \varphi_{jxxx}, \end{cases} \quad j = \overline{1, N}. \tag{11}$$

Зауважимо, що даний метод використовується і до інших нелінійних моделей. Зокрема, до нелінійного рівняння Шредінгера та задачі нелінійної взаємодії N хвиль, тощо (див. [2]).

Інший підхід до побудови точних розв’язків нелінійних рівнянь, інтегровних методом оберненої задачі, полягає у зображенні відповідного нелінійного рівняння за допомогою пари диференціальних операторів (пара Лакса) та використанні диференціальних операторів перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва [4].

На прикладі одних із найбільш відомих моделей — рівняння Кадомцева-Петвіашвілі та нелінійного рівняння Шредінгера ми показуємо, що обидва методи інтегрування нелінійних рівнянь приводять до однакових результатів. Виявляється, що це спостереження має загальний характер. Це пояснюється "неявною присутністю" перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва в методі проектування. В рамках підходу проектування, запропонованого В.О. Марченком, ми демонструємо як можна отримати загальне перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва, а також показуємо його зв'язок з матричним узагальненням перетворення Хопфа-Коула.

Можна показати, що нелінійні рівняння типу Бюргерса (6) є частковим випадком більш загальних C-інтегровних систем, які отримуються з лінійного рівняння (4) за допомогою бінарних перетворень [5]-[6]. При цьому розв'язки відповідних нелінійних систем, інтегровних методом оберненої задачі, виражаються в термінах визначників Грама. Замість диференціального оператора Дарбу-Крама-Матвєєва в цьому випадку виникають інтегральні одягаючі оператори, які відіграють важливу роль в методі оберненої задачі розсіяння (див., наприклад [7]).

1. *Кудрявцев А.Г., Сапожников О.А.* Получение точных решений неоднородного уравнения Бюргерса с использованием преобразования Дарбу //Акустический журнал — 2011. — Т.57, № 3 — с. 313-322.
2. *Марченко В.А.* Нелинейные уравнения и операторные алгебры. – Київ: Наукова думка, 1986. – 155 с.
3. *Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* Ієрархія матричних рівнянь Бюргерса і інтегровні редукції в системі Деві-Стюардсона // Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50, №2. – С.252-264.
4. *Matveev V.B., Salle M.A.* Darboux transformations and solitons. – Berlin Heidelberg, Springer-Verlag. – 1991. – 120 p.

5. *Samoilenko V.H., Sidorenko Yu.M., Buonanno L., Matarazzo G.* Explicit solutions of nonlinear evolution equations via nonlocal reductions approach // Proceedings of Institute of Math. of NAS of Ukraine. – 2000. – V.30, Part II. – P.406-410.
6. *Сидоренко Ю.М.* Бінарні перетворення і (2+1)-вимірні інтегровні системи // Укр. мат. журн. – 2002. – V.54, №11. – С. 1531-1550.
7. *Сидоренко Ю.М., Починайко М.Д., Чвартацький О.І.* Обернена задача розсіяння для просторово-двовимірної системи Дірака і метод бінарних перетворень. // Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2010. – №287: Серія фізико-математичні науки. – С. 28-59.

CONSTRUCTION OF EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR EQUATIONS OF SOLITON THEORY BY PROJECTION METHOD

Two algebrized methods of integration of nonlinear equations, which are proposed by V.O. Marchenko and V.B. Matveev, are compared. Matrix Darboux-Crum-Matveev transformation is obtained by the projection method proposed by V.O. Marchenko.