УДК 512.548.7

ПРО СХРЕЩЕНІ ІЗОТОПІЗМИ КВАЗІГРУП

Фриз І.В.

e-mail: friz_irina@ukr.net

Операція f, яка визначена на множині Q, називається i - *оборотною*, якщо для довільних $a_0,...,a_{i-1},b,a_{i+1},...,a_n$ із Q існує єдиний елемент $x \in Q$ такий що

$$f(a_0,...,a_{i-1},x,a_{i+1},...,a_n) = b.$$

Введемо позначення $J_\tau(i) := |\{\tau(0),...,\tau(\tau^{-1}(i)-1)\}|$, $i \in \overline{0,n} := \{0,...,n\}$.

Нехай υ – довільне часткове ін'єктивне монотонно зростаюче перетворення множини $\overline{0,n}$, $m \in \overline{0,n}$ і нехай $a_0,...,a_n$ – довільні елементи множини Q. $(n+1)$-арна операція f називається *схрещено ізотопною типу* (m,υ) до $(n+1)$-арної операції g, якщо існує послідовність $\vec{\gamma} := (\gamma_0,...,\gamma_n,\gamma)$ підстановок $\gamma_0,...,\gamma_n,\gamma$ множини Q і $J_\upsilon(m)$-оборотна $J_\upsilon(n+1)$-арна операція h на Q така що

$$f(x_0,...,x_n) = \gamma^{-1}g(\gamma_0x_0,...,\gamma_{\upsilon(\upsilon^{-1}(m)-1)}x_{\upsilon(\upsilon^{-1}(m)-1)},$$
$$\gamma_m h(x_{\upsilon 0},...,x_{\upsilon n}),\gamma_{\upsilon(\upsilon^{-1}(m)+1)}x_{\upsilon(\upsilon^{-1}(m)+1)},...,\gamma_n x_n)$$

для всіх $x_0,...,x_n \in Q$. Пара $(\vec{\gamma},h)$ називається *схрещеним ізотопізмом типу* (m,υ) [1]. Якщо $f = g$, то пара $(\vec{\gamma},h)$ називається *схрещеним автотопізмом типу* (m,υ). Якщо h є унарною операцією, то $(\vec{\gamma},h)$ є звичайним ізотопізмом (відповідно, звичайним автотопізмом).

Нехай τ і υ – довільні часткові ін'єктивні перетворення множини $\overline{0,n}$ і $\mathrm{Im}\,\tau \cap \mathrm{Im}\,\upsilon = \overline{0,n}$. Тоді пара бінарних операцій називається (τ,υ)-*відповідними* $\{i,m\}$*-ретрактами* операцій g і h, якщо вони визначені термами, які отримані із $g(x_{\tau 0},...,x_{\tau n})$, $h(x_{\upsilon 0},...,x_{\upsilon n})$ таким чином: усі змінні термів замінюються деякими елементами множини Q, окрім x_i і x_m, де $i \neq m$; до того ж, якщо змінна зустрічається у обох термах, тоді вона замінюється на один і той самий елемент [2]. Якщо $\tau = \varepsilon$, то пару бінарних операцій будемо називати υ-відповідними $\{i,m\}$-ретрактами.

Наведемо критерій оборотності схрещеного ізотопа квазігрупи, що є наслідком теореми 5 із [2].

Теорема 1. Нехай $f = g(\vec{\varepsilon}, h)$ – схрещений ізотоп типу (m, υ) операції g, де $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon, ..., \varepsilon)$, тоді:

1) якщо $i = m$, то операція f є i-оборотною тоді і тільки тоді, коли операція g є $J_\upsilon(i)$-оборотною;
2) якщо $i \notin \mathrm{Im}\upsilon$, то операція f є i-оборотною тоді і тільки тоді, коли g є i-оборотною;
3) якщо $i \in \mathrm{Im}\upsilon$ і $i \neq m$, то операція f є i-оборотною тоді і тільки тоді, коли υ-відповідні $\{i, m\}$-ретракти операцій g і $h^{(J_\upsilon(m))}$ є ортогональними, де $h^{(J_\upsilon(m))}$ позначає $J_\upsilon(m)$-те ділення операції h;
4) операція f є оборотною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови 1)–3) для всіх $i \in \overline{0, n}$.

Будемо говорити, що m-та і s-та змінні операції f *виділяються над групою* $(Q;+)$, якщо

$$f(x_0, ..., x_n) = f_1(x_0, ..., x_{m-1}) + \varphi x_m + f_2(x_{m+1}, ..., x_{s-1}) + \psi x_s + f_3(x_{s+1}, ..., x_n)$$

для деяких автоморфізмів φ і ψ групи $(Q;+)$ і операцій f_1, f_2, f_3.

Операція f називається *лінійною* над групою $(Q;+)$, якщо

$$f(x_0, ..., x_n) = \alpha_0 x_0 + ... + \alpha_n x_n + a,$$

де $\alpha_0, ..., \alpha_n$ є автоморфізмами групи $(Q;+)$ і $a \in Q$. Група $(Q;+)$ називається *групою розкладу* операції f. Отже, кожна змінна лінійної квазігрупи виділяється над її групою розкладу.

Теорема 2. Якщо m-та і s-та змінні операції f виділяються над неабелевою групою $(Q;+)$ і υs-та змінна операції h виділяється над тією ж групою, тоді кожен схрещений автотопізм $(\vec{\gamma}, h)$ операції f є звичайним, тобто h є підстановкою множини Q.

Наслідок. Лінійні схрещені автотопізми довільного типу лінійних квазігруп над неабелевою групою $(Q;+)$ є звичайними.

1. *Сохацький Ф.М.* Про схрещену ізотопію та схрещений ізоморфізм // Труды ИПММ НАН Украины. – 2005. – Вип.11. – С. 23-33.
2. *Sokhatsky F.M., Fryz I.V.* Invertibility criterion of composition of two multiary quasigroups // Comment. Math. Univ. Carolin. – 2012. – vol 53. – 00-00.

ABOUT CROSS ISOTOPISMS OF QUASIGROUPS

An invertibility criterion for cross isotope of a quasigroup is given. It is proved that cross autotopisms of operations are ordinary, if the operations have allocated variables over a non-abelian group.