УДК 539.3

ДО ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ СУЦІЛЬНОГО СКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА

Токовий Ю.В.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України

Розглядається підхід до побудови аналітичного розв'язку тривимірної задачі теорії пружності для суцільного ізотропного циліндра скінченної довжини $\mathfrak{C} = \{0 \le r \le a,\ 0 \le \theta < 2\pi,\ -h \le z \le h\}$ під дією силових навантажень. Для визначення компонент тензора напружень, які точно задовольняють вихідну систему рівнянь задачі, використано два різні подання через гармонічні функції Дуголла [3,4], одне з яких дозволяє зручно задовольнити крайові умови на бічній поверхні (ці складові назвемо «циліндричними»), а інше – на торцях циліндра (ці складові назвемо «шаровими»). Вирази для циліндричних складових компонент тензора напружень розвинуто у ряди Фур'є за окружною та осьовою координатами, а залежні лише від радіальної координати коефіцієнти цих розвинень побудовано так, що вони забезпечують тотожне задоволення рівнянь рівноваги й суцільності та володіють достатньою кількістю ступенів вільності (невідомих сталих коефіцієнтів) для задоволення крайових умов на бічній поверхні циліндра. Аналогічно, вирази шарових складових розвинуто у ряди Фур'є за окружною та Бесселя-Діні за радіальною координатами, а залежні від осьової координати коефіцієнти цих розвинень тотожно задовольняють вихідну систему рівнянь задачі та володіють достатньою кількістю ступенів вільності для задоволення крайових умов на торцях циліндра. Наведемо для прикладу вираз для осьових напружень:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma_z}{G} = \sigma_0 &+ \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 \left[B_n \left(2(2-\nu)\frac{I_0(k_n r)}{I_0(k_n a)} + k_n r \frac{I_1(k_n r)}{I_0(k_n a)} \right) - D_n \frac{I_0(k_n r)}{I_0(k_n a)} \right] \cos k_n z + \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\overline{C}_{0j} - \overline{A}_{0j} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} + 2\lambda_j z \overline{A}_{0j} \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} \right] \frac{\lambda_j^2 J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k_n^2 &\left[B_{nm} \left((m + 4 - 2\nu)\frac{I_m(k_n r)}{I_m(k_n a)} + k_n r \frac{I_{m+1}(k_n r)}{I_m(k_n a)} \right) - D_{nm} \frac{I_m(k_n r)}{I_m(k_n a)} \right] \cos m\theta \cos k_n z + \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\overline{C}_{mj} - \overline{A}_{mj} \right) \frac{\operatorname{ch} \mu_{mj} z}{\operatorname{sh} \mu_{mj} h} + 2\mu_{mj} z \overline{A}_{mj} \frac{\operatorname{sh} \mu_{mj} z}{\operatorname{sh} \mu_{mj} h} \right] \frac{\mu_{mj}^2 J_m(\mu_{mj} r)}{J_m(\mu_{mj} a)} \cos m\theta, \quad (1)
\end{aligned}
$$

отриманий, для спрощення запису, у припущенні, що навантаження циліндра є симетричним відносно площини $z = 0$ і нормальні зусилля, розподілені по торцях циліндра, є парними функціями окружної координати. Тут $k_n = \dfrac{n\pi}{h}$, μ_{mj} – корені рівняння $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,J_m(\mu r)}{\mathrm{d}\,r}\right|_{r=a} = 0$; $\lambda_j \equiv \mu_{0j}$; $B_n, D_n, B_{nm}, D_{nm}, \overline{A}_{0j}$, $\overline{C}_{0j}$, $\overline{A}_{mj}, \overline{C}_{mj}$ – невідомі коефіцієнти; J_m – функції Бесселя першого роду порядку *m*, I_m $(m = 0,1,2,...)$ – функції Макдональда першого роду порядку *m*, σ_0 – поліноміальна елементарна частина осьових напружень; *G* – модуль зсуву і ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу, з якого виготовлено циліндр $\mathfrak{C}$.

Показано, що частини напружень, які не залежать від окружної координати співпадають з точністю до позначення констант з відповідними виразами для напружень, отриманими для осесиметричного випадку [2] навантаження циліндра $\mathfrak{C}$.

Із застосуванням методу суперпозиції [1] для невідомих коефіцієнтів залежних від θ частин напружень отримано систему лінійних алгебричних рівнянь, розв’язок якої знайдено з використанням методики [2].

1. *Гринченко В.Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
2. *Мелешко В.В., Токовий Ю.В., Барбер Дж.Р.* Осесиметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С.120–137.
3. *Dougall J.* An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1904. – **41**, № 8. – P. 129–228.
4. *Dougall J.* An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic rod of circular section // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1914. – **49**, № 17. – P. 895–978.

ON THE SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY PROBLEM FOR A SOLID FINITE CYLINDER

This talk addresses an approach for analysis of three-dimensional stresses in a solid elastic cylinder of finite length subjected to the external field of force loading. This approach is based on application of the method of cross-wise superposition, which allows for satisfaction of the entire set of the force boundary conditions, imposed on both lateral surface and end-faces of the cylinder, within a required accuracy. The governing equations are satisfied identically by making use of the harmonic displacement potential functions suggested by Dousgall.