УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ РАДІАЛЬНО-НЕОДНОРІДНОГО КРУГОВОГО ДИСКА

Токова Л.П.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України

Розглянемо плоску неосесиметричну задачу теорії пружності для радіально-неоднорідного ізотропного кругового диска $\mathcal{L} = \{(\rho;\theta) \in [0;k] \times [0;2\pi]\}$ в умовах плоского напруженого стану. Тут ρ – безрозмірна радіальна, а θ – кутова координати. Задача описується рівняннями рівноваги

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\sigma_r\right) + \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} = \sigma, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\sigma_{r\theta}\right) + \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} = 0 \tag{1}$$

та рівнянням суцільності в напруженнях [2]

$$\Delta\left(\frac{\sigma}{E}\right) = \frac{\sigma_r}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}\left(\frac{1}{G}\right) + \frac{\sigma_\theta}{2\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{1}{G}\right), \tag{2}$$

де

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2};$$

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень; $\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta$; $E = E(\rho)$ – модуль пружності; $\nu = \nu(\rho)$ – коефіцієнт Пуассона; $G = G(\rho)$ – модуль зсуву. Кругова межа диска знаходиться під дією нормальних та дотичних зовнішніх зусиль

$$\sigma_r\big|_{\rho=k} = -p(\theta), \quad \sigma_{r\theta}\big|_{\rho=k} = q(\theta). \tag{3}$$

З використанням підходу, запропонованого у роботах [2,3] на основі рівнянь рівноваги (1) можна отримати наступні рівняння

$$D\sigma_r = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\sigma\right) + \rho\frac{\partial^2\sigma}{\partial\theta^2}, \quad D\sigma_\theta = \rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(\rho^2\sigma\right),$$
$$D\sigma_{r\theta} = -\rho\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\theta}(\rho\sigma), \tag{4}$$

які виражають кожну з компонент тензора напружень через сумарні напруження σ . Тут

$$D = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\right)\right) + \rho\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} .$$

У свою чергу, сумарні напруження знайдемо із рівняння (2). З цією метою розвинемо компоненти тензора напружень, сумарні напруження та зовнішні зусилля у ряди Фур'є за повною тригонометричною системою:

$$\left\{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma, p, \sigma_{r\theta}, q\right\} = \left\{R_0, \Phi_0, \sigma_0, p_0, S_0, q_0\right\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{R_n^1, \Phi_n^1, \sigma_n^1, p_n^1, S_n^2, q_n^2\right\}\cos n\theta + \\ + \left\{R_n^2, \Phi_n^2, \sigma_n^2, p_n^2, S_n^1, q_n^1\right\}\sin n\theta\right], \tag{5}$$

де

$$\left\{R_0, \Phi_0, \sigma_0, p_0, S_0, q_0\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma, p, \sigma_{r\theta}, q\right\} d\theta ,$$

$$\left\{R_n^1, \Phi_n^1, \sigma_n^1, p_n^1, S_n^2, q_n^2\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma, p, \sigma_{r\theta}, q\right\}\cos n\theta d\theta ,$$

$$\left\{R_n^2, \Phi_n^2, \sigma_n^2, p_n^2, S_n^1, q_n^1\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma, p, \sigma_{r\theta}, q\right\}\sin n\theta d\theta .$$

На основі рівнянь (1) або (4) для елементарних складових розвинень (5) отримуємо наступні рівняння:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2 R_0\right) = \sigma_0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho^2 S_0\right) = 0, \tag{6}$$

а рівняння суцільності (2) при цьому набуде вигляду

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\sigma_0}{E}\right)\right) = \frac{\rho R_0}{2}\frac{d^2}{d\rho^2}\left(\frac{1}{G}\right) + \frac{\Phi_0}{2}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{G}\right). \tag{7}$$

При розв'язанні рівнянь (6), (7) слід врахувати крайові умови

$$R_0\left(k\right) = -p_0, \quad S_0\left(k\right) = q_0, \tag{8}$$

які випливають із умов (3) та розвинень (5). Із першого рівняння (6) з урахуванням першої умови (8) отримаємо вираз

$$R_0 = \frac{1}{\rho^2}\int_0^{\rho} \eta\sigma_0(\eta)\mathrm{d}\eta, \tag{9}$$

з якого при $\rho = k$ випливає умова рівноваги для сумарних напружень

$$\int_0^k \eta\sigma_0\left(\eta\right)\mathrm{d}\eta = -k^2 p_0. \tag{10}$$

Застосовуючи інтегрування частинами та використовуючи вираз (9), рівняння суцільності (7) зводиться до вигляду:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\sigma_0}{E}\right) = \frac{R_0}{2}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{G}\right).$$

Рівняння такого типу розглядалося, зокрема, у роботі [4]. З урахуванням виразу (9), воно зводиться до інтегрального рівняння Вольтерра

$$\sigma_0 = E\left[C_0 + \int_0^{\rho} \sigma_0(\eta)\mathcal{K}(\rho,\eta)d\eta\right],$$

де

$$\mathcal{K}(\rho,\eta) = \frac{\eta}{2}\int_{\eta}^{\rho} \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{G(\xi)}\right)d\xi ,$$

а C_0 – стала інтегрування, яку слід знайти за допомогою інтегральної умови (10). Розв'язок рівняння (12) можна побудувати з використанням відомих підходів [1].

Після визначення сумарних напружень за формулою, елементарні радіальні напруження визначаються виразом (9), а колові – за формулою

$$\Phi_0 = \sigma_0 - R_0 .$$

При цьому задля виконання умов статичної рівноваги повинні задовольнятися наступні рівності

$$S_0 = q_0 = 0 .$$

Для знаходження залежних від колової змінної частин напружень (5), з рівнянь (2) випливає наступне рівняння суцільності

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\sigma_n^i}{E}\right)\right) - \frac{n^2}{\rho^2}\frac{\sigma_n^i}{E} = \frac{R_n^i}{2}\frac{d^2}{d\rho^2}\left(\frac{1}{G}\right) + \frac{\Phi_n^i}{2\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{G}\right). \tag{11}$$

Рівняння (4) набувають вигляду

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2R_n^i\right)\right)-n^2\rho R_n^i=\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\sigma_n^i\right)-\rho n^2\sigma_n^i,$$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\Phi_n^i\right)\right)-n^2\rho\Phi_n^i=\rho\frac{d^2}{d\rho^2}\left(\rho^2\sigma_n^i\right), \tag{12}$$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2S_n^i\right)\right)-n^2\rho S_n^i=(-1)^{i+1}n\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\sigma_n^i\right),$$

де $i=1,2.$ Розв’язки рівнянь (12) слід знайти за виконання крайових умов

$$R_n^i\left(k\right)=-p_n^i,\quad S_n^i\left(k\right)=q_n^i,\quad n=1,2. \tag{13}$$

Розв’язавши рівняння (12) з крайовими умовами (13), знаходимо вирази радіальних та колових напружень через сумарні напруження. Підставивши отримані вирази у рівняння (11), аналогічно до випадку елементарних частин, прийдемо до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду, розв’язок якого знаходимо з використанням методів [1].

1. *Верлань А.Ф., Сизинов В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наук. думка, 1983. – 543 с.
2. *Токовий Ю.В.* Визначення плоского неосесиметричного термонапруженого стану радіально-неоднорідного кільця // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 113-123.
3. *Vihak V. M.* Solution of the thermoelastic problem for a cylinder in the case of two–dimensional nonaxisymmetric temperature field // ZAMM. – 1996. – № 1. – P. 35–43.
4. *Калиняк Б. М.* Інтегрування рівнянь одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних циліндричних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 2. – С. 124-131.

DETERMINATION OF THE STRESS STATE OF A RADIALLY-INHOMOGENEOUS CIRCULAR DISC

Application of direct integration method for construction of an analytical solution to the plane non-axisymmetic elasticity problem for a radially inhomogeneous circular disc under the plane stress hypothesis is considered. By making use of the decompositions into the Fourier series along with integration of the equilibrium equations, the stress tensor components are expressed in terms of the total stress, which is found from the compatibility equation in terms of stresses. This gives the opportunity to develop an efficient method for analysis of radially inhomogeneous discs.