УДК 539.3

ПРО УМОВИ ПОСЛІДОВНОЇ ВІДДІЛЬНОСТІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА У ВИКРИВЛЕНОМУ ПРОСТОРІ

Тайстра Ю. В., Пелих В. О.
ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, ythelloworld@gmail.com

Розглядаємо систему рівнянь Максвела для вектор-потенціалу у спінорному формалізмі Ньюмена-Пенроуза та отримуємо достатні умови віддільності системи.

На фоні викривленого простору-часу розглядаємо рівняння Максвелла. У цьому випадку система рівнянь Максвелла, яка є системою з чотирьох диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку, є сильно зв'язаною. Це не дозволяє знайти її розв'язок відомими методами.

Вихідні рівняння для вектор-потенціалу за відсутності струму $(J^a = 0)$ та з врахуванням умови Лоренца ($\nabla_a A^a = 0$) мають вигляд

$$\nabla_b \nabla^b A^a + R^a{}_c A^c = 0\,, \tag{1}$$

де A^a – 4-вектор-потенціал е/м поля, ∇_a - коваріантна похідна, $R^a{}_c$ - тензор Річчі.

Використані наступні співвідношення для коваріантної похідної та представлення 4-вектора у формалізмі Ньюмена-Пенроуза:

$$\nabla_a = g_a{}^b \nabla_b = (l_a n^b + n_a l^b - m_a \overline{m}^b - \overline{m}_a m^b)\nabla_b = n_a D + l_a \Delta - \overline{m}_a \delta - m_a \overline{\delta}\,,$$

$$A^a = A_0 l^a + A_1 n^a + A_2 m^a + \overline{A}_2 \overline{m}^a\,.$$

Враховуєм також деякі комутаційні співвідношення та рівняння поля Ньюмена-Пенроуза.

Систему (1) нами записано у формалізмі Ньюмена-Пенроуза

$$D\Delta A\begin{pmatrix} D\Delta A_0 \\ D\Delta A_1 \\ D\Delta A_2 \\ D\Delta A_3 \end{pmatrix} + \Delta D A\begin{pmatrix} \Delta D A_0 \\ \Delta D A_1 \\ \Delta D A_2 \\ \Delta D A_3 \end{pmatrix} + \delta\overline{\delta} A\begin{pmatrix} \delta\overline{\delta} A_0 \\ \delta\overline{\delta} A_1 \\ \delta\overline{\delta} A_2 \\ \delta\overline{\delta} A_3 \end{pmatrix} + \overline{\delta}\delta A\begin{pmatrix} \overline{\delta}\delta A_0 \\ \overline{\delta}\delta A_1 \\ \overline{\delta}\delta A_2 \\ \overline{\delta}\delta A_3 \end{pmatrix} + DA\begin{pmatrix} DA_0 \\ DA_1 \\ DA_2 \\ DA_3 \end{pmatrix} + \Delta A\begin{pmatrix} \Delta A_0 \\ \Delta A_1 \\ \Delta A_2 \\ \Delta A_3 \end{pmatrix} + \delta A\begin{pmatrix} \delta A_0 \\ \delta A_1 \\ \delta A_2 \\ \delta A_3 \end{pmatrix} + \overline{\delta} A\begin{pmatrix} \overline{\delta} A_0 \\ \overline{\delta} A_1 \\ \overline{\delta} A_2 \\ \overline{\delta} A_3 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $D\Delta A$, ΔDA, $\delta\overline{\delta}A$, $\overline{\delta}\delta A$, DA, ΔA, δA, $\overline{\delta}A$, A – матриці коефіцієнтів при других похідних, перших похідних та алгебраїчній частині.

Для того, щоб система була послідовно віддільною достатньо, щоб виконувалась наступні умови на коефіцієнти (скаляри Ньюмена-Пенроуза):

$$\kappa = \sigma = \rho = \tau = 0\,. \tag{3}$$

Застосовуючи перетворення Лоренца спінової бази

$$\begin{cases} \tilde{o}^A = o^A, \\ \tilde{i}^A = i^A + co^A; \end{cases} \begin{cases} \tilde{o}^A = o^A + di^A, \\ \tilde{i}^A = i^A; \end{cases} \tag{4}$$

отримуємо систему диференціальних рівнянь, умови сумісності якої виділятимуть алгебрично спеціальний тип простору.

1. Cohen J. M., Kegeles L. S. Constructive procedure for perturbations of spacetimes. Phys. Rev. D. 1979. 19. 1641_1664
2. Cohen J. M., Kegeles L. S. Electromagnetic field in curved spaces: a constructive procedure. Phys. Rev. D. 1974. 10. 1070_1084
3. Stewart J. - Advanced general relativity (CUP, 1991)(K)(ISBN 0521449464)(T)(234s)
4. Пелих В., Тайстра Ю. Побудова спінорного підходу до розщеплення системи рівнянь Максвелла у рімановому просторі. Фіз. зб. НТШ. 2011, Т.8, с. 128-133.
5. Пенроуз Р., Риндлер В. – Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля: пер. с англ., - М:Мир, - 1987.

THE CONDITIONS OF CONSEQUENTIAL DECOUPLING OF MAXWELL EQUATIONS ON CURVED SPACE

We consider a system of Maxwell equations for the vector-potential in Newman-Penrose formalism. Sufficient conditions of splitting the system was obtained.