УДК 512.64

ПРО ФОРМУ СМІТА НАЙБІЛЬШОГО СПІЛЬНОГО ЛІВОГО ДІЛЬНИКА МАТРИЦЬ

Романів А.М.

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, вул. Наукова 3-б, 79060
romaniv_a@ukr.net

Нехай R – комутативна область головних ідеалів з $1 \neq 0$, $M_n(R)$ – кільце $n \times n$ матриць над R. Нехай A, B – неособливі $n \times n$ матриці над R. Для матриць A та B існують такі оборотні матриці P_A, P_B та Q_A, Q_B, що

$$P_A A Q_A = \mathrm{E}, \text{ де } \mathrm{E} = diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n), \; \varepsilon_i \,|\, \varepsilon_{i+1}, \; i = 1, \ldots, n-1.$$

$$P_B B Q_B = \Delta, \text{ де } \Delta = diag(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n), \; \delta_i \,|\, \delta_{i+1}, \; i = 1, \ldots, n-1.$$

Матриці Е та Δ називаються канонічними діагональними формами або ж формами Сміта, а матриці P_A, P_B та Q_A, Q_B – лівими та правими перетворювальними матрицями матриць A та B, відповідно.

Позначимо через $\mathbf{P}_A$ та $\mathbf{P}_B$ множину всіх лівих перетворювальних матриць для матриць A та B, відповідно.

Якщо $A = BC$, то кажуть, що матриця B є лівим дільником матриці A Якщо $A = DA_1$ та $B = DB_1$, то матрицю D називають спільним лівим дільником матриць A та B. Окрім цього, якщо матриця D ділиться на кожний спільний лівий дільник матриць A та B, то матрицю D називають найбільшим спільним лівим дільником матриць A та B.

У 1933р. C.C. MacDuffee [1] запропонував метод знаходження найбільшого спільного лівого дільника матриць A та B, який ґрунтується на результатах E. Cahen [2] та A. Chatelet [3]. У 1949р. B.M. Stewart [4] показав, що найбільший спільний лівий дільник матриць A та B визначений однозначно з точністю до правої асоційованості.

Теорема. Нехай

$$A \sim diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n), \; \varepsilon_i \,|\, \varepsilon_{i+1}, \; i = 1, \ldots, n-1;$$

$$B \sim diag(1, 1, \ldots, 1, \delta), \; P_B P_A^{-1} = \left\| s_{ij} \right\|_1^n, \text{ де } P_A \in \mathbf{P}_A, \; P_B \in \mathbf{P}_B.$$

Тоді форма Сміта найбільшого спільного лівого дільника матриць A та B має вигляд

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \dfrac{(\varepsilon_n, \delta)}{\tau} \end{matrix} \right\|, \text{ де } \tau = \frac{k}{(k, s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n,n-1})}, \; k = \frac{(\varepsilon_n, \delta)}{(\varepsilon_{n-1}, \delta)}.$$

1. *MacDuffe C.C.* Matrices with elements in a principal ring // Bull.Amer. Math. Soc. – 1933. – 39. – P. 570-573.
2. *Cahen E*. Théorie des Nombres. 1914. – I.
3. *Chatelet A*. Groupes Abéliens Finis. 1924.
4. *Stewart B.M.* A note on least common left multiples // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. − **55**. − 6. – P. 587-591.

ON SMITH NORMAL FORM OF GREATEST COMMON LEFT DIVISOR OF MATRICES

By some restrictions the Smith normal form of greatest common left divisor of matrices is established.