УДК 512.546

УЗАГАЛЬНЕНІ РЕТРАКТИ, ПОВ'ЯЗАНІ З ОБ’ЄКТАМИ ТОПОЛОГІЧНОЇ АЛГЕБРИ

Пирч Н.М.

Українська академія друкарства, pnazar@ukr.net

Нехай $E = \bigcup_{n\in N} E_n$ − деяка сигнатура. Топологічний простір A називається топологічною E-алгеброю, якщо цей простір не є порожнім і означено неперервні відображення $\{e_{n,A} : E_n \times A^n \to A : n \in N\}$ (див. [1]).

Скажемо, що підпростір Y топологічного простору X є E-ретрактом простору X, якщо довільне неперервне відображення $f : Y \to W$ з топологічного простору Y у топологічну E-алгебру W допускає неперервне продовження на X.

Для топологічного простору X позначимо через $F(X,E)$ вільну топологічну E-алгебру над простором X. Скажемо, що підпростір Y тихоновського простору X є E-вкладеним у топологічний простір X, якщо мінімальна топологічна E-підалгебра $F(X\,|\,Y,E)$ вільної топологічної E-алгебри $F(X,E)$, що містить Y є природньо топологічно ізоморфною вільній топологічній E-алгебрі $F(Y,E)$.

Теорема 1. Якщо підпростір Y тихоновського простору X є E-ретрактом, цього простору, то підпростір Y є E-вкладеним у цей простір.

Теорема 2. Якщо існує топологічна E-алгебра, носій якої є незв’язним топологічним простором, то кожен E-ретракт зв’язного топологічного простору є зв’язним топологічним простором.

Скажемо, що простір X є E-ретральним, якщо X є ретрактом деякої топологічної E-алгебри.

Теорема 3. Наступні умови є еквівалентними для тихоновського простору X та його підпростору Y

1) підпростір Y є E-ретрактом простору X;

2) довільне неперервне відображення $f : Y \to T$ з топологічного простору Y у E-ретральний простір T допускає неперервне продовження на X;

3) існує неперервний гомоморфізм $h_1 : F(X, E) \to F(Y, E)$ такий, що $h_1(x) = x$ для всіх $x \in Y$;

4) існує неперервне відображення $h_2 : F(X, E) \to F(Y, E)$ таке, що $h_2(x) = x$ для всіх $x \in Y$;

5) існує неперервне відображення $h_3 : X \to F(Y, E)$ таке, що $h_3(x) = x$ для всіх $x \in Y$;

6) підпростір Y є E-вкладеним у простір X та існує неперервний гомоморфізм $h_4 : F(X, E) \to F(X \mid Y, E)$ такий, що $h_4(x) = x$ для всіх $x \in Y$;

7) підпростір Y є E-вкладеним у простір X та існує неперервне відображення $h_5 : F(X, E) \to F(X \mid Y, E)$ таке, що $h_5(x) = x$ для всіх $x \in Y$;

8) підпростір Y є E-вкладеним у простір X та існує неперервне відображення $h_6 : X \to F(X \mid Y, E)$ таке, що $h_6(x) = x$ для всіх $x \in Y$;

9) підпростір Y є E-ретрактом вільної топологічної алгебри $F(X, E)$;

10) підпростір Y є E-ретрактом вільної топологічної алгебри $\underbrace{F(F...F(F}_{n}(X, E), E)...E), E)$ для деякого n;

11) підпростір Y є E-ретрактом вільної топологічної алгебри $\underbrace{F(F...F(F}_{n}(X, E), E)...E), E)$ для всіх n;

12) довільне неперервне відображення $f : Y \to F$ з топологічного простору Y у вільну топологічну E-алгебру F допускає неперервне продовження на X;

13) існує неперервне відображння $h_7 : X \to \underbrace{F(F...F(F}_{n}(Y, E), E)...E), E)$ для деякого n таке, що $h_7(x) = x$ для всіх $x \in Y$;

14) підпростір Y є E-ретрактом вільної топологічної алгебри $F(X, E_1)$ для деякої сигнатури E_1 такої, що $E_1 \subseteq E$;

15) підпростір Y є E-ретрактом вільної топологічної алгебри $F(X, E_1)$ для довільної сигнатури E_1 такої, що $E_1 \subseteq E$;

16) для довільної сигнатури E_1 такої, що $E_1 \subseteq E$ існує неперервний гомоморфізм $t_1 : F(X, E_1) \to F(Y, E)$ такий, що $t_1(x) = x$ для всіх $x \in Y$;

17) для деякої сигнатури E_1 такої, що $E_1 \subseteq E$ існує неперервний гомоморфізм $t_2 : F(X, E_1) \to F(Y, E)$ такий, що $t_2(x) = x$ для всіх $x \in Y$;

18) для довільної сигнатури E_1 такої, що $E_1 \subseteq E$ існує неперервне відображення $t_3 : F(X, E_1) \to F(Y, E)$ таке, що $t_3(x) = x$ для всіх $x \in Y$;

19) для деякої сигнатури E_1 такої, що $E_1 \subseteq E$ існує неперервне відображення $t_4 : F(X, E_1) \to F(Y, E)$ таке, що $t_4(x) = x$ для всіх $x \in Y$.

Теорема 4. Наступні умови є еквівалентними для тихоновського простору X:

1) простір X є E-ретральним;

2) простір X є E-ретрактом своєї вільної топологічної E-алгебри $F(X, E)$;

3) для кожного простору Y, що містить X як E-ретракт, існує ретракція $r : Y \to X$.

Наслідок 1. Нехай Y $-E$-ретральний підпростір тихоновського простору X і Z − непорожній тихоновський простір. Тоді наступні умови є еквіалентними:

1) підпростір Y є E-ретрактом простору X;
2) підпростір Y є ретрактом простору X;
3) підпростір $Y \times Z$ є E-ретрактом простору $X \times Z$;
4) підпростір $Y \times Z$ є ретрактом простору $X \times Z$.

Наслідок 2. Наступні умови є еквівалентними для тихоновського простору X та його E-ретрального підпростору Y:

1) підпростір Y є E-ретрактом простору X;

2) підпростір Y^n є E-ретрактом простору X^n для довільного натурального n;

3) підпростір Y^n є E-ретрактом простору X^n для деякого натурального n.

Теорема 5. Нехай X − топологічний простір, K − його підпростір, $p : X \to Y$ − неперервне відображення таке, що звуження $p|_K : K \to p(K)$ є гомеоморфізмом. Якщо підпростір $p(K)$ є E-ретрактом простору Y, то підпростір K є E-ретрактом простору X.

Скажемо, що пара топологічних просторів (Y, Z) є E-узгодженою, якщо природнє відображення $m : F(Y, E) \times Z \to F(Y \times Z, E)$, яке елементу $(\omega(x_1, x_2, ..., x_n), z) \in F(Y, E) \times Z$ ставить у відповідність елемент $\omega((x_1, z), (x_2, z)..., (x_n, z)) \in F(Y \times Z, E)$, є неперервним.

Теорема 6. Якщо підпростір Y є E-ретрактом тихоновського простору X і пара (Y,Z) є E узгодженою, то підпростір $Y\times Z$ є E-ретрактом тихоновського простору $X\times Z$.

Нехай Y − підпростір топологічного простору X, $\sim_Y$ − деяке відношення еквівалентності задане на Y. Ми можемо продовжити це відношення до відношення еквівалентності $\sim_X$, заданого на X, покладаючи $x\sim_X y$ тоді і тільки тоді, коли $x=y$ або $x,y\in Y$ і $x\sim_Y y$.

Теорема 7. Нехай підпростір Y є E-ретрактом топологічного простору X. Нехай також $\sim_Y$ − деяке відношення еквівалентності задане на Y, $\sim_X$ − його продовження на X, $p: X\to X/\sim_X$ − фактор-відображення. Тоді звуження $p|_Y$ буде факторним відображенням, а підпростір $p(Y)$ буде E-ретрактом фактор-простору $X/\sim_X$.

Для топологічного простору X розглянемо наступні вільні об'єкти: $A(X)$ − вільна абелева топологічна група, $R(X)$ − вільне топологічне кільце, $cR(X)$ − вільний абелевий топологічне кільце, $M_K(X)$ − вільний топологічний модуль над комутативним кільцем K.

Теорема 8. Наступні умови є еквівалентними для топологічного простору X та його підпростору Y:

1) існує неперервний гомоморфізм $h_1: A(X)\to A(Y)$ вільних абелевих топологічних груп такий, що $h_1(x)=x$ для всіх $x\in Y$;

2) існує неперервний гомоморфізм $h_2: R(X)\to R(Y)$ вільних топологічних кілець такий, що $h_2(x)=x$ для всіх $x\in Y$;

3) існує неперервний гомоморфізм $h_3: cR(X)\to cR(Y)$ вільних абелевих топологічних кілець такий, що $h_3(x)=x$ для всіх $x\in Y$;

4) для довільного топологічного комутативного кільця K з одиницею існує неперервний гомоморфізм $h_K: M_K(X)\to M_K(Y)$ такий, що $h_K(x)=x$ для всіх $x\in Y$.

Скажемо, що тихоновський простір X є абсолютним E-ретрактом, якщо X є E-ретрактом довільного тихоновського простору Y, що містить X як замкнений підпростір.

Теорема 9. Наступні умови є еквівалетними для тихоновського простору X та сигнатури E :

1) простір X є абсолютним ретрактом;
2) простір X є E -ретральним та є абсолютним E -ретрактом.

1. *Choban M.M.* Algebraic equivalence of topological spaces // Bul. A.S. a Rep. Mol. – 2001.– **1(35).** – p. 12-36.

GENERALIZED RETRACTS CONCERNED TO THE OBJECTS OF TOPOLOGICAL ALGEBRA

We consider properties and introduce the methods for constructing examples of the generalized retracts, concerned with the extensions of the continuous mappings into topological algebras