

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОРЕЛЯЦІЇ ДВОХ СТАЦІОНАРНИХ ПОЛІВ ТЕМПЕРАТУРИ У ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНИХ ТІЛАХ

Пелех П.Р.

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України м. Львів, вул.Дж.Дудаєва 15,
e-mail: ppavlo@gmail.com

Застосування техніки діаграм Фейнмана при дослідженні температурних полів у багатофазних тілах випадково неоднорідної структури дозволило отримати рівняння Дайсона [1] для теплопровідності та нелокальне інтегродиференціальне рівняння для усередненого поля концентрації [2, 3]. Проте використання діаграм Фейнмана дає можливість глибшого вивчення стохастичних полів, наприклад, математичного опису кореляції випадкових полів температури, стаціонарному випадку якого присвячена дана робота.

Нехай в N -фазному тілі з випадково розташованими неоднорідностями протікають процеси теплопровідності. Тіло складається з N твердих різних за густиною фаз. Матеріал тіла розглядаємо як середовище, фізичні характеристики якого є випадковими функціями координат простору. Вважаємо, що коефіцієнт теплопровідності є сталим в області кожної з фаз. Розподіл випадкового температурного поля $T(\vec{r})$ в такому тілі у стаціонарному випадку описує рівняння теплопровідності

$$L(\vec{r})T(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla}(\lambda(\vec{r})\vec{\nabla}T(\vec{r})) = f(\vec{r}), \quad (1)$$

де $\lambda(\vec{r})$ - випадковий коефіцієнт теплопровідності, $f(\vec{r})$ - густина джерел тепла (детермінована функція), \vec{r} - радіус-вектор біжучої точки.

Стаціонарне поле температури можна подати у вигляді ряду Неймана [2]

$$T(\vec{r}) = T_0(\vec{r}) + \int_{(V)} G(\vec{r}, \vec{r}') L_s(\vec{r}') T_0(\vec{r}') d\vec{r}' + \\ + \iiint_{(V)} G(\vec{r}, \vec{r}') L_s(\vec{r}') G(\vec{r}', \vec{r}'') L_s(\vec{r}'') T_0(\vec{r}'') d\vec{r}' d\vec{r}'' + \dots, \quad (2)$$

де $T_0(\vec{r})$ - розв'язок однорідної задачі, $G(\vec{r}, \vec{r}')$ - функція Гріна, $L_s(\vec{r})$ - випадковий оператор вигляду

$$L_s(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{\lambda} - \lambda_j) \eta_{ij}(\vec{r}) \Delta + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} [\lambda(\vec{r})]_{\Gamma_{ij}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_{ij}}) \vec{\nabla} ,$$

$\bar{\lambda} = \overline{\lambda(\vec{r})}$ – усереднений коефіцієнт теплопровідності, $\eta_{ij}(\vec{r})$ - випадкова функція структури [1, 3], j - номер фази, i - номер включення (в рамках однієї фази), $i = \overline{1, n_j}$, n_j - кількість включень сорту j , $j = \overline{1, N}$.

Розглянемо кореляцію двох полів температури в точках \vec{r}_1 і \vec{r}_2

$$\langle T(\vec{r}_1) T(\vec{r}_2) \rangle \equiv \mathcal{M}(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \tag{3}$$

Для того, щоб знайти $\mathcal{M}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ потрібно перемножити два ряди вигляду (2) і після цього виконати усереднення. Аналітично це дуже громіздка задача. Тому скористаємося діаграмною технікою.

Введемо діаграмні позначення для ще неусереднених величин, які входять в (3): для $\vec{r} = \vec{r}_1$

$$T(\vec{r}_1) \sim \text{wavy line}, L_s(\vec{r}_1) \sim \frac{\times}{\vec{r}_1}, T_0(\vec{r}_1) \sim \text{zigzag line}, G(\vec{r}_1, \vec{r}'_1) \sim \frac{\text{wavy line}}{\vec{r}_1 - \vec{r}'_1}.$$

В точці $\vec{r} = \vec{r}_2$

$$T(\vec{r}_2) \sim \text{wavy line}, L_s(\vec{r}_2) \sim \frac{\times}{\vec{r}_2}, G(\vec{r}_2, \vec{r}'_2) \sim \frac{\text{wavy line}}{\vec{r}_2 - \vec{r}'_2}, T_0(\vec{r}_2) \sim \text{zigzag line}.$$

При усередненні цих величин отримаємо елементи:

$$\langle \text{wavy line} \rangle \sim \text{thick line}, \langle \frac{\times}{\vec{r}'} \frac{\times}{\vec{r}''} \rangle \sim \text{two dots connected by a dashed line}.$$

Розклад (2) можна зобразити нескінченною сумою діаграм вигляду

$$\text{wavy line} = \text{zigzag line} + \text{zigzag line} \times \text{zigzag line} + \text{zigzag line} \times \text{zigzag line} \times \text{zigzag line} + \dots \tag{4}$$

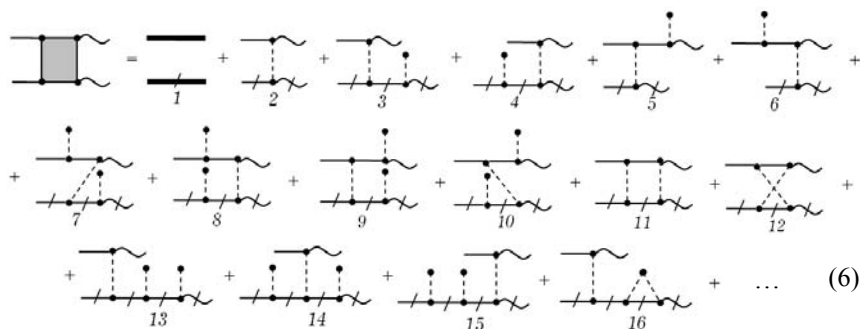
Аналогічний розклад для $T(\vec{r}_2)$ відрізняється від $T(\vec{r}_1)$ тільки змінною. Щоб розрізнити ці ряди, будемо перекреслювати відповідні лінії в ряді для $T(\vec{r}_2)$:

$$\text{wavy line} = \text{zigzag line} + \text{zigzag line} \times \text{zigzag line} + \text{zigzag line} \times \text{zigzag line} \times \text{zigzag line} + \dots \tag{5}$$

Тепер перемножимо розклади (4) і (5) та усереднимо. При проведенні процедури множення окремих елементів з (4) і (5) помістимо зверху елементи, які належать (4), а внизу – (5). Якщо ввести графічне позначення для $\langle T(\vec{r}_1) T(\vec{r}_2) \rangle$ таким чином

$$\langle \text{wavy line}(\vec{r}_1) \text{wavy line}(\vec{r}_2) \rangle = \text{thick line}(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

то результат перемноження та усереднення рядів (4) і (5) можна подати так



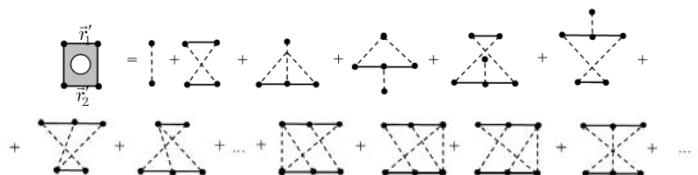
Розглянемо спочатку сильно зв'язані діаграми. Кожна з них починається двома лініями G і закінчується двома кривими лініями T_0 , тобто має вигляд



або в аналітичній формі

$$\mathcal{M}^{(c.36.)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \iint_{(V)} G(\vec{r}_1, \vec{r}_1') G(\vec{r}_2, \vec{r}_2') \mathcal{K}(\vec{r}_1', \vec{r}_2') T_0(\vec{r}_1') T_0(\vec{r}_2) d\vec{r}_1' d\vec{r}_2'.$$

Функція \mathcal{K} називається ядром оператора інтенсивності. Діаграмне представлення $\mathcal{K}(\vec{r}_1', \vec{r}_2')$ має вигляд



В аналітичній формі ядро оператора інтенсивності $\mathcal{K}(\vec{r}_1', \vec{r}_2')$ запишеться так

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\vec{r}_1', \vec{r}_2') &= \psi_2(\vec{r}_1', \vec{r}_2') + \iint_{(V)} G(\vec{r}_1', \vec{r}_1'') G(\vec{r}_2', \vec{r}_2'') \psi_2(\vec{r}_1', \vec{r}_2') \psi_2(\vec{r}_1'', \vec{r}_2'') d\vec{r}_1'' d\vec{r}_2'' + \\ &+ \iint_{(V)} \psi_2(\vec{r}_1', \vec{r}_2'') G(\vec{r}_2', \vec{r}_2'') G(\vec{r}_2'', \vec{r}_2''') \psi_2(\vec{r}_2', \vec{r}_2''') d\vec{r}_2'' d\vec{r}_2''' + \\ &+ \iint_{(V)} G(\vec{r}_1', \vec{r}_1'') G(\vec{r}_1'', \vec{r}_1''') \psi_2(\vec{r}_1', \vec{r}_1''') \psi_2(\vec{r}_1'', \vec{r}_2') d\vec{r}_1'' d\vec{r}_1''' + \\ &+ \iiint_{(V)} G(\vec{r}_1', \vec{r}_1'') G(\vec{r}_2', \vec{r}_2'') G(\vec{r}_2'', \vec{r}_2''') \psi_2(\vec{r}_1', \vec{r}_2') \psi_2(\vec{r}_1'', \vec{r}_2') \langle L_s(\vec{r}_2'') \rangle d\vec{r}_1'' d\vec{r}_2'' d\vec{r}_2''' + \end{aligned}$$

$$+ \int \int \int_{(V)} G(\vec{r}'_1, \vec{r}_1) G(\vec{r}'_2, \vec{r}_2) G(\vec{r}'_3, \vec{r}_3) \langle L_s(\vec{r}_s) \rangle \Psi_2(\vec{r}'_1, \vec{r}'_2) \Psi_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d\vec{r}'_1 d\vec{r}'_2 d\vec{r}'_3 + \dots \quad (7)$$

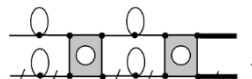
Тут $\Psi_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_k)$ - кумулянтна функція:

$$\Psi_k(\vec{r}', \vec{r}'', \dots, \vec{r}^{(k)}) \sim \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \vdots \end{array}$$

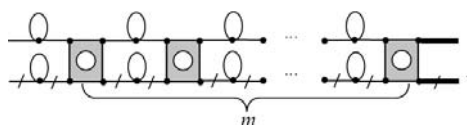
Враховуючи вираз (7) для ядра оператора інтенсивності \mathcal{H} , сума всіх сильно зв'язаних діаграм набуде вигляду



Розглянемо слабо зв'язані діаграми, які містять два сильно зв'язані елементи з ядра оператора інтенсивності \mathcal{H} . Сума таких діаграм дорівнює



Аналогічно подамо суму діаграм, які містять m сильно зв'язаних елементів:



Звідси випливає, що ряд (6) можна подати у вигляді

$$\text{[Diagram]} = \text{[Diagram]} + \text{[Diagram]} + \text{[Diagram]} + \dots$$

Тоді співвідношення (7) можна подати так

$$\text{[Diagram]} = \text{[Diagram]} + \text{[Diagram]} \times \left[\text{[Diagram]} + \text{[Diagram]} + \text{[Diagram]} + \dots \right]$$

Підсумовуючи вираз в дужках, з використанням співвідношення (7) отримаємо аналог рівняння Дайсона для кореляції температурного поля:

$$\text{[Diagram]} = \text{[Diagram]} + \text{[Diagram]} \quad (8)$$

Рівняння (8) також є аналогом рівняння Бете-Солпітера для функції когерентності [1].

1. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II Случайные поля. – М.: Наука, 1978. – 436 с.

2. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю., Пелех П.Р. Нелокальне рівняння теплопровідності для багатофазних стохастично неоднорідних тіл // - Доповіді НАН України, - 2007. - №7 - С.49-54
3. Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю., Пелех П.Р. Математичне моделювання процесів теплопровідності у випадково неоднорідних тілах з використанням діаграм Фейнмана // Мат. методи та фіз.-мех. поля – 2008. – Вип. 51, №1. - С. 140-152.

**MATHEMATICAL MODELLING A CORRELATION OF TWO STEADY-
STATE TEMPERATURE FIELDS IN RANDOMLY NONHOMOGENEOUS
BODIES**

The Feynman diagram technique is developed for modelling a correlation of two temperature fields in bodies with stochastically nonhomogeneous structure for the steady-state regime. The equation for correlation random fields of temperature, that is analog of the Bete-Solpeter equation for coherence function, is built.