УДК 539.3

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТЕРМОЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ ІЗ ТРІЩИНАМИ ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Пастернак Я.М.

Луцький національний технічний університет, pasternak@ukrpost.ua

У сучасних високотехнологічних пристроях часто використовують п'єзоелектричні матеріали, що відіграють роль сенсорів, прецизійних позиціонувальних елементів, перетворювачів механічної енергії в електричну і навпаки тощо. Найбільші значення п'єзоелектричних сталих мають сегнетоелектрики, які, в свою чергу, є також піроелектриками, тобто матеріалами, нагрівання яких зумовлює їхню поляризацію. Явище піроефекту знайшло своє широке використання, зокрема, у сенсорах інфрачервоного випромінювання. Також ці ефекти активно використовують при створенні сучасних смарт-матеріалів. Наявність структурних неоднорідностей таких матеріалів зумовлює високу концентрацію напружень, температурних і електричних полів поблизу них. При цьому піроефект відіграє істотну роль.

При застосуванні методів інтегральних рівнянь, зокрема, методу граничних елементів (МГЕ) до аналізу піроелектричних тіл досі не розв'язано низки важливих проблемних питань. Зокрема, не побудовано інтегральних рівнянь, що дали би можливість досліджувати не тільки теплоізольовані тріщини, але й тріщини із заданою температурою їхніх берегів. Також при аналізі п'єзоелектричних тіл із тріщинами у більшості випадків слід зважати на електричну проникність середовища, що заповнює просвіт, оскільки для проникних і непроникних тріщин коефіцієнти інтенсивності напружень є різними [1]. Тому у цій роботі, виходячи із теорем про голоморфність функцій [2] та розширеного формалізму Стро [3], опрацьовано методику побудови інтегральних рівнянь термоелектропружності анізотропних тіл. Крім цього, розширюються змістові складові моделі тонких п'єзоелекричних включень [1], що дають можливість описувати, зокрема, й проникні, непроникні та напівпроникні тріщини тонкими неоднорідностями із заданими належним чином властивостями їхнього матеріалу.

Відповідно до [3] у нерухомій прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ рівняння рівноваги, балансу тепла та конститутивні співвідношення плоскої деформації лінійно термоелектропружного тіла і плоскої стаціонарної теплопровідності можна записати у такому уніфікованому вигляді

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} = 0\,, \quad h_{i,i} = 0\,; \tag{1}$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkm}\tilde{u}_{k,m} - \tilde{\beta}_{ij}\theta\,, \quad h_i = -k_{ij}\theta_{,j} \tag{2}$$

при

$$\begin{gathered} \tilde{u}_i = u_i\,, \ \tilde{u}_4 = \phi; \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}\,, \ \tilde{\sigma}_{4j} = D_j\,; \\ \tilde{\beta}_{ij} = \beta_{ij}\,, \ \tilde{\beta}_{4j} = -\chi_j\,; \tilde{C}_{ijkm} = C_{ijkm}\,, \ \tilde{C}_{ij4m} = e_{mij}\,, \\ \tilde{C}_{4jkm} = e_{jkm}\,, \tilde{C}_{4j4m} = -\kappa_{jm} \quad (i,k = 1,2,3;\, j,m = 1,2). \end{gathered} \tag{3}$$

Тут σ_{ij} – компоненти тензора напружень; h_i – компоненти вектора густини теплового потоку; D_i – електричне зміщення; u_i – переміщення точок тіла; ϕ – електричний потенціал; θ – зміна температури порівняно з відліковою; C_{ijkm} – пружні сталі; k_{ij} – коефіцієнти теплопровідності; $\beta_{ij} = C_{ijkm}\alpha_{km} + e_{mij}\lambda_m$ – модулі теплового розширення (коефіцієнти теплових напружень); α_{ij} – коефіцієнти теплового розширення; e_{ijk} – п’єзоелектричні сталі; κ_{ij} – діелектричні сталі матеріалу; $\chi_i = -e_{ikm}\alpha_{km} + \kappa_{ij}\lambda_j$ – піроелектричні коефіцієнти; λ_i – піроелектричні модулі. Тензори з компонентами C_{ijkm}, k_{ij}, κ_{ij} та β_{ij} вважаються симетричними. У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Кома в індексних позначеннях відповідає диференціюванню за зазначеною після коми координатою, тобто, $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$.

Загальний розв’язок рівнянь (1), (2) відповідно до методів розширеного формалізму Стро має вигляд [3]

$$\begin{gathered} \theta = 2\,\mathrm{Re}\{g'(z_t)\}\,, \ \vartheta = 2k_t\,\mathrm{Im}\{g'(z_t)\}\,, \ h_1 = -\vartheta_{,2}\,, \ h_2 = \vartheta_{,1}\,; \\ \tilde{\mathbf{u}} = 2\,\mathrm{Re}\{\mathbf{A}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{c}g(z_t)\}\,, \ \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = 2\,\mathrm{Re}\{\mathbf{B}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{d}g(z_t)\}\,; \end{gathered} \tag{4}$$

$$z_t = x_1 + p_t x_2\,; \ z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2\,; \ \mathbf{f}(z_*) = \left[F_1(z_1), F_2(z_2), F_3(z_3), F_4(z_4)\right]^{\mathrm{T}},$$

де $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ – функція напружень, для якої $\tilde{\sigma}_{i1} = -\tilde{\varphi}_{i,2}$, $\tilde{\sigma}_{i2} = \tilde{\varphi}_{i,1}$; $g(z_t)$, $F_\alpha(z_\alpha)$ – певні аналітичні функції своїх аргументів; комплексна стала p_t є коренем (із додатною уявною частиною) характеристичного рівняння теплопровідності, а матриці $\mathbf{A} \equiv [A_{i\alpha}] = [\mathbf{a}_\alpha]$ та $\mathbf{B} \equiv [B_{i\alpha}] = [\mathbf{b}_\alpha]$, сталі p_α $(\alpha = 1,..,4)$ та вектори $\mathbf{c}$ і $\mathbf{d}$ визначаються із задачі на власні значення формалізму Стро [3].

Окрім відомих умов ортогональності Стро [3] для матриць $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$, отримано такий важливий для побудови інтегральних рівнянь термоелектропружності зв'язок:

$$\mathbf{PB}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Im}\{\mathbf{c}\}+\mathbf{PA}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Im}\{\mathbf{d}\}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Im}\{p_t\mathbf{c}\}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Im}\{p_t\mathbf{d}\},\ \mathbf{P}=\langle p_*\rangle. \tag{5}$$

Використання теорем про голоморфність функцій [2] та співвідношень (4), (5) дає можливість побудувати інтегральні рівняння, які повинні задовольняти граничні значення стрибків температури, теплових потоків, переміщень, електричного потенціалу, напружень, електричних зміщень та комплексних потенціалів на розімкнутих (чи замкнутих) дугах $\Gamma=\bigcup_j\Gamma_j$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Sigma g\left(Z_t(\mathbf{y})\right)=&-\frac{1}{4\pi k_t}\int_\Gamma f^*\left(Z_t(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)\Sigma h_n(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x})+\\&+\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma\left(n_2-p_tn_1\right)\ln\left(Z_t(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)\Delta\theta(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x}),\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Sigma\mathbf{f}\left(Z_*(\mathbf{y})\right)=&\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left\langle\ln\left(Z_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)\right\rangle\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\Sigma\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x})-\\&-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left\langle\frac{n_2-n_1p_*}{Z_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right\rangle\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\Delta\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x})-\\&-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left\langle\ln\left(Z_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)\right\rangle\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{d}\left(n_2-n_1p_t\right)\right\}\right)\Delta\theta(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x})-\\&-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left\langle\ln\left(Z_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)\right\rangle\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{c}\left(n_2-n_1p_t\right)\right\}\right)\Delta\theta(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x})-\\&-\frac{1}{2\pi ik_t}\int_\Gamma\left\langle f^*\left(Z_*(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)\right\rangle\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Im}\{\mathbf{d}\}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{Im}\{\mathbf{c}\}\right)\Sigma h_n(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x}),\end{aligned} \tag{7}$$

де $\Sigma(\bullet)=(\bullet)^+ +(\bullet)^-$, $\Delta(\bullet)=(\bullet)^+ -(\bullet)^-$; $i=\sqrt{-1}$; $k_t=\sqrt{k_{11}k_{22}-k_{12}{}^2}$; $\langle F(Z_*)\rangle=\mathrm{diag}\left[F_1(Z_1),F_2(Z_2),F_3(Z_3),F_4(Z_4)\right]$; $Z_\alpha(\mathbf{x})=x_1+p_\alpha x_2$; $\tilde{t}_i=\tilde{\sigma}_{ij}n_j$ – компоненти розширеного вектора напружень; $n_j^\pm$ – компоненти векторів нормалей $\mathbf{n}^\pm$ до поверхонь $\Gamma^\pm$; $\mathbf{n}\equiv\mathbf{n}^+=-\mathbf{n}^-$; $d\Gamma$ – дійсний диференціал дуг Γ; $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Gamma$.

Підставляючи (6) та (7) у формули (4) отримаємо дуальні рівняння стаціонарної теплопровідності та термопружності. При дослідженні середовищ із заданим на безмежності навантаженням до правих частин рівнянь (6), (7) слід додати члени, що відповідають однорідному розв'язку для безмежного бездефектного середовища. При цьому з’ясовано, що у безмежних термоелектропружних анізотропних середовищах, на відміну від суто термопружних, однорідний тепловий потік може зумовити виникнення поля напружень та електричних зміщень. Для трансверсально ізотропних піроелектриків цього не буде лише у разі, коли тепло тече уздовж напряму поляризації.

Для аналізу тонких неоднорідностей та напівпроникних тріщин отримано модель тонкого піроелектричного включення у формі

$$\Delta h_n(\mathbf{y}) = \frac{k_{11}'^{\mathrm{i}}(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})}\left[\Delta\theta(\mathbf{y}) + \Delta\theta^*(\mathbf{y})\right], \quad \Sigma\theta(\mathbf{y}) = 2\theta^0 - \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \frac{H(s) - H^*(s)}{h(s)k_{22}'^{\mathrm{i}}(s)} ds;$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) = -\frac{\mathbf{V}(\mathbf{y})\left[\Delta\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) + \Delta\tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{y})\right]}{h(\mathbf{y})} - \mathbf{v}(\mathbf{y})\Sigma\theta(\mathbf{y}), \tag{8}$$

$$\Sigma\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = 2\tilde{\mathbf{u}}^0 + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \frac{\mathbf{W}(s)\left[\tilde{\mathbf{P}}(s) + \tilde{\mathbf{P}}^*(s)\right]}{h(s)} ds + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \mathbf{w}(s)\Sigma\theta(s) ds.$$

Тут $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ – пружні, п’єзоелектричні та піроелектричні сталі включення; θ^0 – середнє значення зміни температури лівого торця включення; $\tilde{\mathbf{u}}^0$ – середні значення переміщень та електричного потенціалу на лівому торці $\mathbf{y}_0$ включення. Модель (8) для ізотермічного випадку еквівалентна до моделі, розробленої в [1].

Отримані інтегральні рівняння та модель тонкого включення впроваджено в МГЕ. Алгоритм успішно апробовано на тестових задачах, що мають аналітичний розв’язок. Побудовано розв’язки низки нових задач для безмежних та скінченних піроелектричних тіл.

1. *Pasternak Ia.* Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities // Engng. Anal. Bound. Elem. – 2011. – **35**, No. 4. – P. 678–690.
2. *Линьков А.М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
3. *Qin Q.H.* Green’s function and boundary elements of multifield materials. – Oxford: Elsevier, 2007. – 254 p.

INTEGRAL EQUATIONS FOR THERMOELECTROELASTICITY OF ANISOTROPIC SOLIDS WITH CRACKS AND THIN INCLUSIONS

This paper develops boundary integral equations for 2D thermoelectroelasticity of anisotropic solids with cracks and thin inclusions. A model of a thin pyroelectric inhomogeneity is obtained. Derived equations are introduced into the boundary element method, which allows numerical solution of complicated problems.