

ДВОСТОРОННІЙ ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З КВАДРАТНИМ ОТВОРОМ ТА НАСКРІЗНОЮ ПРЯМОЛІНІЙНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Опанасович В. К., Бедрій В. Я., Слободян М. С.

Львівський національний університет імені Івана Франка, kafmech@franko.lviv.ua

В роботі досліджена задача про двосторонній згин безмежної ізотропної пластини завтовшки $2h$ з наскрізною прямолінійною тріщиною завдовжки $2l$ та квадратним отвором із стороною $2a$. Припускається, що під дією розподілених згинальних моментів M_x^∞ і M_y^∞ на безмежності береги тріщини приходять у гладкий контакт по області постійної ширини h_1 [1] поблизу верхньої основи пластини (рис. 1).

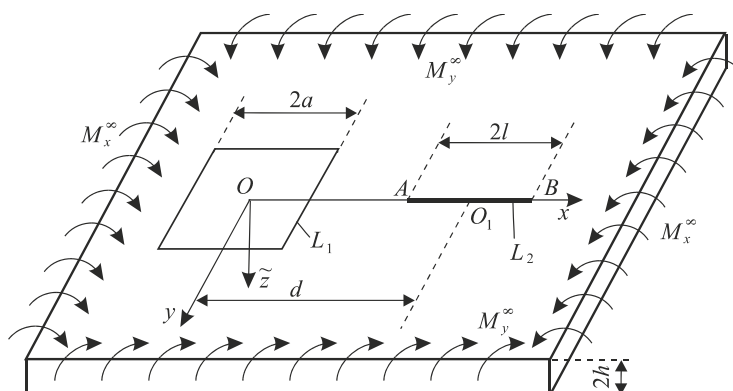


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

За рахунок контакту берегів тріщини розв'язок задачі подається у вигляді розв'язків двох задач: задачі згину пластини (класична теорія) та плоскої задачі. Задача розв'язана за таких крайових умов

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= 0, \quad \sigma_{\rho\theta} = 0, \quad M_\rho = 0, \quad P_\rho = 0, \quad x \in L_1, \\ M_y &= \beta N, \quad \partial_x [u_y] + \alpha \partial_{xy}^2 [w] = 0, \quad x \in L_2, \\ P^\pm &= 0, \quad M_y^\pm = M_y, \quad \sigma_{yy}^\pm = -N/(2h), \quad \sigma_{xy}^\pm = 0, \quad x \in L_2, \\ \alpha &= 0,5(1 + (1 - \gamma)^2)h, \quad \beta = (1 - \gamma/3)h, \quad \gamma = h_1/h, \quad [f] = f^+ - f^-, \end{aligned}$$

де N – контактне зусилля між берегами тріщини; σ_{xy} , σ_{yy} і $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\rho\theta}$ – компоненти тензора напружень, u_y – компонента вектора переміщення у плоскій задачі, w – прогин пластини в задачі згину, M_y , M_ρ – згинальний момент, P , P_ρ – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила.

Для розв'язування задачі введемо комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ [2] плоскої задачі і класичної теорії згину пластин $\Phi_3(z)$ і $\Psi_3(z)$ [3]. За допомогою комплексних потенціалів та методів теорії функцій комплексної змінної на основі крайових умов отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \rho(x) = c'_0, \operatorname{Im} g(x) = 0, \operatorname{Re}(\rho(x) + \beta h g(x)) = \tilde{a}_2, \\ \operatorname{Re}(g_2(x) + \tilde{\beta} G_1(x)) = 0, x \in L_2; \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^2 \int_{L_i} \{ K_i(u, t) g_i(u) du + M_i(u, t) \overline{g_i(u)} d\bar{u} \} = 0, t \in L_1,$$

$$\tilde{D} + \sum_{i=1}^2 \int_{L_i} \{ \tilde{K}_i(u, t) G_i(u) du + \tilde{M}_i(u, t) \overline{G_i(u)} d\bar{u} \} = i c, t \in L_1;$$

де $g(x) = \frac{2}{\pi} \int_{L_2} \frac{g_2(u) du}{u-x} + \int_{L_1} \{ K(u, x) g_1(u) du + M(u, x) \overline{g_1(u)} d\bar{u} \},$

$$\rho(x) = \tilde{a}_1 \int_{L_2} \frac{G_2(u) du}{u-x} + \int_{L_1} \{ K_3(u, x) G_1(u) du + M_3(u, x) \overline{g_1(u)} d\bar{u} \},$$

$$\tilde{\beta} = \frac{hE}{1-\nu}, \tilde{\kappa} = \frac{3+\nu}{1-\nu}, m = -D(1-\nu), D = 2Eh^3 / (3(1-\nu^2)),$$

$$\tilde{a}_1 = m \tilde{\kappa} / \pi, \tilde{a}_2 = m \tilde{\Gamma} (\tilde{\kappa} - 1) - m \tilde{\Gamma}', \tilde{D} = (\tilde{\kappa} - 1) \tilde{\Gamma},$$

$$\tilde{\Gamma} = -(M_x^\infty + M_y^\infty) / (4D(1+\nu)), \tilde{\Gamma}' = -(M_y^\infty - M_x^\infty) / (2m),$$

$K(u, x)$, $M(u, x)$, $K_3(u, x)$, $M_3(u, x)$, $K_i(u, x)$, $M_i(u, x)$, $\tilde{K}_i(u, x)$, $\tilde{M}_i(u, x)$ – відомі функції, c'_0 , c – невідомі дійсні сталі, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини, $g_i(t)$, $G_i(t)$ – невідомі функції.

Систему інтегральних рівнянь доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{L_2} G_2(u) du = 0, \int_{L_2} g_2(x) dx = 0, \operatorname{Im} \int_{L_2} u G_2(u) du = 0, \operatorname{Im} \int_{L_1} \bar{u} G_1(u) du = 0,$$

де перші дві умови виражають собою відповідно однозначність кутів повороту та однозначність переміщень у плоскій задачі при обході контуру

тріщини, а дві останні - однозначність прогину відповідно при обході контуру тріщини і квадратного отвору.

Контактне зусилля N між берегами тріщини та коефіцієнти інтенсивності моментів K_i та зусиль k_i [4] можна обчислити за формулами

$$N = -h \operatorname{Re} g(x), \quad K_1 + iK_2 = \pm D(3 + \nu) \lim_{x \rightarrow \pm l} \{f(x)G_2(x)\},$$

$$k_1 + ik_2 = \mp h \lim_{x \rightarrow \pm l} \{f(x)g_2(x)\}, \quad f(x) = \sqrt{(l^2 - x^2)/l}.$$

Система сингулярних інтегральних рівнянь розв'язана чисельно з використанням відповідних квадратурних формул [4] при $\nu = 0.3$, $\gamma = h_1/h = 0.13$.

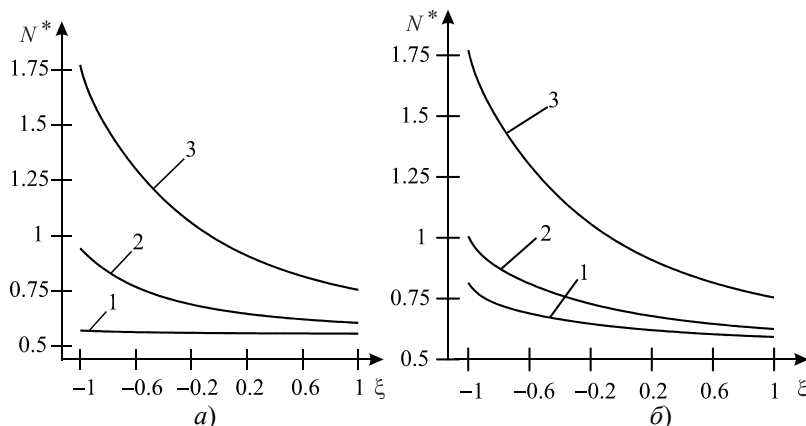


Рис. 2. Зведене контактне зусилля між берегами тріщини

На рис. 2 зображена графічна залежність зведеного контактного зусилля $N^* = hN/M_y^\infty$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$. Рисунок 2 а) побудовано при $\lambda = d/l = 2.1$, $\tilde{a} = a/l = 1$; крива 1 побудована при $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 0$, крива 2 – $\rho = 1$, крива 3 – $\rho = 5$. Як бачимо з рис. 2 а) при збільшенні відношення моментів M_x^∞/M_y^∞ контактне зусилля між берегами тріщини зростає. Рис. 2 б) побудовано при $\lambda = d/l = 2.1$, $\rho = 1$; крива 1 побудована при $\tilde{a} = 0.1$, крива 2 – $\tilde{a} = 0.5$, крива 3 – $\tilde{a} = 1$. Як бачимо з рис. 2 б) при збільшенні розмірів отвору \tilde{a} контактне зусилля між берегами тріщини зростає. З рис. 2 а) та 2 б) бачимо, що контактне зусилля є більшим у ближній вершині тріщини по відношенні до квадратного отвору, у порівнянні з дальньою вершиною.

На рис. 3 зображена графічна залежність зведеного коефіцієнта інтенсивності моментів (КИМ) $K_1^* = K_1/(M_y^\infty \sqrt{l})$ у точці A (суцільні лінії)

та у точці B (штрихові лінії). Рис. 3 *a*) побудований при $\tilde{a} = 1$ від параметра $\lambda = d/l$, причому криві 1 побудовані при $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty = 0$, криві 2 – $\rho = 1$, криві 3 – $\rho = 3$. З цього рис. видно, що при збільшенні відношення моментів M_x^∞ / M_y^∞ КІМ зростають, а при віддаленні тріщини від квадратного отвору КІМ у вершинах A та B тріщини прямують до однієї величини, яка відповідає випадку однієї ізольованої тріщини. На рис. 3 *б*) зображена графічна залежність КІМ K_1^* від $\tilde{a} = a/l$ при $\rho = 1$. Криві 1 побудовані при $\lambda = d/l = 2,1$, криві 2 – $\lambda = 3$, криві 3 – $\lambda = 5$. З цього рис. видно, що при збільшенні розмірів квадратного отвору КІМ у вершинах тріщини зростає.

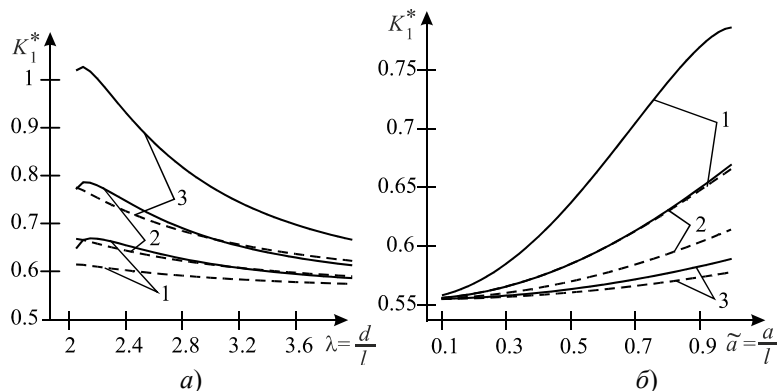


Рис. 3. Зведені коефіцієнти інтенсивності моментів

1. Опанасович В.К. Згин пластини з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В.К. Опанасович // Міжвузівський збірник "Наукові нотатки". - 2007. - Вип. 20 (2). - с. 123-127.
2. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 708 с.
3. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит. - Минск: Изд-во Беларус. ун-та. - 1975. - 256 с.
4. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. - Киев: Наук. думка. - 1988. - 324 с.

BILATERAL BENDING ISOTROPIC PLATES WITH A SQUARE HOLE AND PERVASIVE RECTILINEAR CRACK WIDTH IN VIEW OF THE CONTACT AREA ITS BANKS

The problem of distributed bending moments at infinity isotropic plate with a square hole and crack, banks which come in smooth contact near one of the foundations of the plate. Using the method of complex variable theory, solving the problem came down to building the solution of singular integral equations which is solved numerically. The numerical analysis of the problem.