УДК 539.3

АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Оліярник Н.Р.[1], Пастернак Я.М.[2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка, nazaroliyarnyk13@gmail.com
[2]Луцький національний технічний університет, pasternak@ukrpost.ua

Відомо, що впровадження в однорідний матеріал всілякого роду неоднорідностей (включень різної жорсткості, накладок тощо) може значно змінити його короткочасну міцність, експлуатаційний ресурс, а подеколи й фізико-механічні властивості. При цьому слід зважати як на поодинокі включення, так і на системи регулярно розташованих неоднорідностей. Останні, як правило, розглядають при моделюванні композитних матеріалів та шаруватих гірських порід. З огляду на це виникає необхідність визначення напружено-деформованого стану тіл із системами тонких неоднорідностей.

Періодичні системи тріщин в ізотропному матеріалі розглянуто у монографіях [1, 2] та численній кількості статей. Значно менше робіт стосується лінійно періодичних систем тріщин та тонких включень в анізотропному середовищі. Тому метою цієї роботи є побудова загального підходу для дослідження антиплоскої деформації анізотропних тіл із періодичними системи тонких пружних включень довільної геометрії та жорсткості.

Розглянемо антиплоску деформацію пружного безмежного тіла із системою тонких пружних включень однакової жорсткості. На спільній межі тіла та включень виконуються умови ідеального механічного контакту.

Відповідно до принципу спряження континуумів різної вимірності [2] кожне включення моделюємо лінією Γ_s ($s \in \mathbb{Z}$) розривів полів напружень Σt^s та переміщень Δw^s, що виникатимуть на берегах $\Gamma_s^{\pm}$ включення. Тоді на основі формули Сомільяни інтегральні рівняння задачі для тіла з лініями стрибків набудуть вигляду

$$\frac{1}{2}\Sigma w^s(\mathbf{y}) = w^*(\mathbf{y}) + \\ +\sum_s \left[\mathrm{RPV}\int_{\Gamma_s^+} W(\mathbf{x},\mathbf{y})\Sigma t^s(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) - \mathrm{CPV}\int_{\Gamma_s^+} T(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta w^s(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) \right], \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\Delta t^{s}(\mathbf{y}) = n_j^{+}(\mathbf{y})\left[\overset{*}{\sigma}_{3j} + \sum_{s}\left[\mathrm{CPV}\int_{\Gamma_s^+} D_j(\mathbf{x},\mathbf{y})\Sigma t^{s}(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \mathrm{HPV}\int_{\Gamma_s^+} S_j(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta w^{s}(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x})\right]\right], \tag{2}$$

де $\mathbf{y}\in\Gamma_k$ $(k\in\mathbb{Z})$ – точка колокації; w, t – ненульові компоненти векторів переміщень (0; 0; w) та напружень (0; 0; t); $\Delta t = t^{+} - t^{-}$, $\Sigma w = w^{+} + w^{-}$; $t^{\pm} = \sigma_{3j}^{\pm} n_j^{\pm}$ ($n_j^{\pm}$ – компоненти вектора нормалей $\mathbf{n}^{\pm}$ до поверхонь $\Gamma_s^{\pm}$); знаками «+» та «–» позначено величини, що стосуються поверхонь Γ_s^{+} та Γ_s^{-}, утворених розрізом Γ_s; $\overset{*}{\sigma}_{3j}$, $w^{*}(\mathbf{y})$ – задані на безмежності навантаження та відповідне йому поле переміщень. У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Ядра інтегральних рівнянь відповідно до залежностей формалізму Stroh [3] мають такий вигляд:

$$W(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left[A^2 \ln Z(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right], \quad T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left[(n_2 - n_1 p)\frac{AB}{Z(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right]. \tag{3}$$

Тут $Z(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = x_1 + px_2 - (y_1 + py_2)$. Ядра D_j та S_j описані в [4]. Комплексні сталі p, A та B визначаються за заданими пружними сталими матеріалу на основі формалізму Stroh [3].

Враховуючи лінійну періодичність системи ідентичних одне одному тонких включень, унаслідок трансляційної симетрії можна стверджувати, що стрибки напружень Σt^{s} та переміщень Δw^{s} є однаковими для кожного включення. Тоді рівняння (1), (2) запишуться у вигляді

$$\frac{1}{2}\Sigma w^{0}(\mathbf{y}) = w^{*}(\mathbf{y}) +$$

$$+\mathrm{RPV}\int_{\Gamma_s^+} W^{\mathrm{p}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Sigma t^{0}(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) - \mathrm{CPV}\int_{\Gamma_s^+} T^{\mathrm{p}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta w^{0}(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}), \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\Delta t^s(\mathbf{y}) = n_j^+(\mathbf{y})\left[\sigma_{3j}^* + \sum_s \left[\mathrm{CPV}\int_{\Gamma_s^+} D_j(\mathbf{x},\mathbf{y})\Sigma t^s(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \mathrm{HPV}\int_{\Gamma_s^+} S_j(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta w^s(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x})\right]\right], \tag{5}$$

де ядра $\mathbf{K}^{\mathrm{p}} = \left[W^{\mathrm{p}}, T^{\mathrm{p}}, D_j^{\mathrm{p}}, S_j^{\mathrm{p}}\right]$ мають такий загальний вигляд:

$$\mathbf{K}^{\mathrm{p}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\mathbf{x} + s\boldsymbol{\omega}, \mathbf{y}), \tag{6}$$

а $\boldsymbol{\omega} = \left(\omega_{x_1}, \omega_{x_2}\right)$ – вектор періоду.

У (5), відповідно до (2) та (6), необхідно обчислити суми

$$S_1^{\mathrm{p}} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \ln(u + s\omega),\ S_2^{\mathrm{p}} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{u + s\omega} = \frac{dS_1^{\mathrm{p}}}{du},\ S_3^{\mathrm{p}} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u + s\omega]^2} = -\frac{dS_2^{\mathrm{p}}}{du}, \tag{7}$$

де $u = Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, $\omega = Z(\boldsymbol{\omega})$. Враховуючи правила обчислення таких сум та диференціювання функцій отримаємо

$$S_1^{\mathrm{p}} = \ln\sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right),\quad S_2^{\mathrm{p}} = \frac{\pi}{\omega}\mathrm{ctg}\left(\frac{u\pi}{\omega}\right),\quad S_3^{\mathrm{p}} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \mathrm{cosec}^2\left(\frac{u\pi}{\omega}\right), \tag{8}$$

Таким чином, для розв’язування задач із лінійно періодичними системами включень в ядрах (2) інтегральних рівнянь (5) необхідно зробити такі заміни:

$$\ln Z(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \to S_1^{\mathrm{p}},\ \left[Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})\right]^{-1} \to S_2^{\mathrm{p}},\ \left[Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})\right]^{-2} \to S_3^{\mathrm{p}} \tag{9}$$

Для розв’язування сформульованої задачі до інтегральних рівнянь (4), (5) необхідно долучити ті чи інші співвідношення моделі тонкого включення

$$\Sigma w(\mathbf{y}) = F^w(\mathbf{y}, \Delta w, \Sigma t),\quad \Delta t(\mathbf{y}) = F^t(\mathbf{y}, \Delta w, \Sigma t), \tag{10}$$

метод побудови яких можна знайти у роботі [4].

Систему крайових інтегральних рівнянь (5) розв’язуватимемо модифікованим методом граничних елементів [5]. Для цього криву Γ_0 апроксимуємо за допомогою n тривузлових граничних елементів. Крайові функції Σt^0 та Δw^0 апроксимуємо на елементі за їхніми вузловими значеннями.

Базові функції для елементів, що не прилягають до торців неоднорідності, виберемо у формі поліномів Лагранжа [5]. Для елементів, що моделюють приторцеві ділянки включення використаємо описані в [4, 6] спеціальні функції, які враховують кореневу особливість напружень у вершині неоднорідності і дають можливість визначати узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) з високою точністю. Останні обчислюємо за формулами

$$K_{31} = \lim_{s \to 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} L \Delta w(s), \quad K_{32} = -\lim_{s \to 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma t(s), \tag{11}$$

де $L = -2\sqrt{-1}B^2$ – дійсне число, що відповідає тензору Барнет – Лоте $\mathbf{L}$ [3] у випадку плоскої анізотропії.

На основі запропонованих залежностей побудованого в роботі підходу здійснено розрахунки для анізотропного середовища із лінійно періодичною системою тонких неоднорідностей. Розглянуто випадки тіла з одним, двома та трьома стовпчиками компланарних включень. Виявлено зменшення значень узагальнених КІН при зближені включень між собою (внаслідок ефекту екранування). Досліджено вплив зміни параметрів міри анізотропії матеріалу на значення КІН.

У разі ізотропного середовища усі отримані результати добре узгоджуються з даними, поданими у [2] та аналітичним розв’язком [1], що підтверджує їхню достовірність, а також засвідчує високу ефективність та точність запропонованого підходу.

1. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
2. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
3. Ting T.C.T. Anisotropic elasticity: theory and applications / T.C.T. Ting. – New York: Oxford University Press. – 1996. – 567 p.
4. Pasternak Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities / Ia. Pasternak // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2011. – **35**. – No. 4. – P. 678–690.
5. Portela A. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems / Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P. // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1992. – **33**. – P. 1269–1287.
6. Pasternak Ia.M. Thin inclusions theory integral equations numerical solution using the boundary element method procedure / Ia.M. Pasternak, H.T. Sulym // Proc. Int. Conf. “Integral Equations – 2010”, 25–27 August 2010 (Lviv). – Lviv: PAIS, 2010. – P. 104–108.

ANTIPLANE SHEAR OF ANISOTROPIC SOLIDS WITH SINGLY PERIODIC SYSTEMS OF THIN INCLUSIONS

This paper presents the boundary element approach for the analysis of antiplane shear of anisotropic elastic medium with a singly periodic system of thin inhomogeneities. The proposed approach is used to study an anisotropic medium containing one, two or three columns of parallel singly periodic thin inclusions.

The influence of inclusion interaction and anisotropy of the medium on the generalized stress intensity factors is studied. For the case of an isotropic medium the numerical data of the proposed approach agrees with the particular analytical solutions.