УДК 512.553.2

СТРУКТУРА ГРАТКИ КВАЗІФІЛЬТРІВ У МУЛЬТИПЛІКАТИВНОМУ МОНОЇДІ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Олійник Р.М.

Львівський національний аграрний університет, forvard-or@ukr.net

У 1983 році Дж. Людеман [5] увів до розгляду основні поняття, пов’язані зі скрутами у категорії S-полігонів, за аналогією з існуючою теорією скрутів у категорії R-модулів. Сьогодні теорія скрутів для S-полігонів стрімко розвивається, про що свідчать хоча б публікації [6–8] та монографія [4].

Нехай S – моноїд з нулем. Будемо розглядати σ-квазіфільтри конгруенцій в моноїді S які є аналогами S-фільтрів ідеалів кільця R, які розглядалися у статті [1]. У роботах [7; 8] досліджували квазіфільтри правих конгруенцій, які тісно пов’язані зі скрутами.

Означення. Квазіфільтром моноїда S називається підмножина E з $Con(S)$, яка задовольняє умови:

1) якщо $\rho \in E$ і $\rho \subseteq \tau \in Con(S)$, тоді $\tau \in E$;

2) з умови $\rho \in E$ випливає $(\rho : s) \in E$ для всіх $s \in S$.

3) якщо $\rho \in E$ і $\tau \in Con(S)$ таке, що $(\rho : s)$, $(\rho : t)$ належать до E для всіх $(s : t) \in \rho$, тоді $\tau \in E$, тоді E називається квазіфільтром.

Нехай задано фіксовану ліву конгруенцію σ на S. Тоді позначимо множину:

$$E_\sigma = \left\{ \tau \,\middle|\, \tau \in Con(S), \tau \vee \sigma = 1_S \right\}.$$

Ця множина є квазіфільтром. Називаємо його спеціальним квазіфільтром або скорочено σ-квазіфільтром. Говоритимемо, що σ-квазіфільтр тривіальний, якщо він містить Δ або складається тільки з 1_S.

Лема 1. Для довільної конгруенції σ множина E_σ є квазіфільтром.

Через $(N,\cdot)$ позначатимемо моноїд натуральних чисел з операцією множення.

Лема 2. Нехай I – лівий головний ідеал моноїда $(N,\cdot)$. Множина $\bar{\tau} = \left\{ (a,b) \,\middle|\, |a-b| \in I \text{ àáî } a = b \right\}$ породжує конгруенцію на моноїді $(N,\cdot)$.

Визначимо множину:

$\rho_{(1,k)} = \{(a,b) \mid s(1,k),\ldots,s(1,k^n),\ldots,s(k,1),s(k^n,1),\ldots\}$, де k – довільне натуральне число, $s, n \in N$.

Лема 3. Множина $\rho_{(1,k)}$ породжує нерісову конгруенцією на моноїді $(N,\cdot)$.

Теорема 2. Нехай $\sigma = \rho_{rN}$ – рісова конгруенція, де r – довільне натуральне число. Для довільного σ-квазіфільтр

$$E_\sigma = \{N \times N, \tau_{(1,r)}, \ldots, \tau_{(1,r^n)}, \ldots\},\text{ де } n \in N .$$

Теорема 3. Нехай $\sigma = \tau_{(1,r)}$ – нерісова конгруенція, де r – довільне натуральне число. Для довільного σ-квазіфільтра

$$E_\sigma = \{N \times N, \tau_{rN}, \ldots, \tau_{r^N N}, \ldots\},\text{ де } n \in N .$$

Доведення попередніх результатів можна знайти в [2].

Позначимо через $\bigvee\limits_{\alpha \in A} E_\alpha$ та $\bigwedge\limits_{\alpha \in A} E_\alpha$ об'єднання та перетин довільної сім'ї σ-квазіфільтрів, відповідно.

Наступна теорема є аналогом теореми Куроша про опис скрутів у категорії абелевих груп. Вона дає опис всіх квазіфільтрів конгруенцій над мультиплікативним моноїдом натуральних чисел.

Теорема 4. Довільний нетривіальний квазіфільтр E на мультиплікативному моноїді натуральних чисел можна побудувати за формулою:

$$E = \bigwedge_{\alpha \in A} \bigvee_{\beta \in B} E_\alpha ,$$

де E_α – фіксований σ-квазіфільтр, породжений конгруенцією α.

Зрозуміло, що множини A та B є підмножинами в множині всіх конгруенцій на мультиплікативному моноїді натуральних чисел.

1. *Горбачук О. Л.* Про S-кручення в модулях // Вісник Львівського державного університету ім. Ів. Франка.– 1977. – Вип. 2. – С. 32–34.
2. *Олійник Р. М.* Про спеціальні квазі-фільтри в мультиплікативному моноїді натуральних чисел //– Прикл. проблеми мех. і мат. – 2008. – Вип. 6.– С. 80–87.
3. *Howie J.M.* An Introduction to Semigroup Theory – London, 1976. – 272 p.
4. *Kilp M.* Monoids, Acts and Categories. – Berlin, 2000. – 529 p.
5. *Luedeman J. K.* Torsion theories and semigroup of quotients // – Lecture Notes in Mathematics 998, Springer-Verlag. – Berlin; New York, 1983. – P. 350–373.
6. *Wiegandt R.* Radicals and Torsion Theory for Acts // Semigroup Forum. – 2006. – Vol. 72. – P. 312-328.
7. *Zang R. Z.* Torsion theories and quasi-filters of right congruences Algebra Colloq. – 1994. – Vol. 1(3). – P. 273–280.
8. *Zang R. Z.* Hereditary torsion classes of S-systems // Semigroup Forum. – 1996. – Vol. 52. – P. 253–270.

ON THE LATTICE OF QUASI-FILTERS ON THE MULTIPLICATIVE MONOID TO THE NATURAL NUMBERS

We investigate the concept of σ-quasi-filters of congruences of monoid to the natural nambers. We described all non trivial quasi-filters of congruences of the multiplicative monoid to the natural nambers over σ-quasi-filters.