УДК 539.3

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ЗВ'ЯЗАНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ПРО ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ В ТОНКІЙ ПЛАСТИНІ

Меркотан Г.В., Шамровський О.Д.

Запорізька державна інженерна академія, merkatan@ukr.net

Отримані взаємозв'язані рівняння термопружності для тонкої однорідної пластини при наявності тепловіддачі з її поверхонь $z = \pm h$ з урахуванням швидкості поширення теплового потоку:

$$\Delta\vec{u} + (c^2 - 1)grad\ div\ \vec{u} - 2\alpha_t(c^2 - 1)gradt = \frac{1}{c_2^2}\ddot{\vec{u}} \qquad (1),$$

$$\Delta t - \mu(\ell t - t_c) - \frac{1}{\varkappa}\ell\left[\frac{\partial t}{\partial \tau} + \gamma_0 div\dot{\vec{u}}\right] = 0$$

де t – температура, u – переміщення, τ_r – час релаксації теплового потоку, α_t – температурний коефіцієнт лінійного розширення ізотропного тіла, λ_t – коефіцієнт теплопровідності ізотропного тіла, ν - коефіцієнт Пуассона, G – модуль здвигу, E – ізотермічний модуль Юнга.

$$c^2 = \frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{1-\nu},\ \gamma_0 = \frac{\alpha_t ET}{c_v(1-\nu)(1+\varepsilon)},\ \varkappa = \frac{\lambda_t}{c_v(1+\varepsilon)},\ \ \varepsilon = \frac{\alpha_t^2 ET}{c_v(1-2\nu)}\frac{1+\nu}{1-\nu},\ c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},$$

при $\ell = 1$ система диференційних рівнянь (1) описують задачу класичної теплопровідності [1].

Перейдемо до безрозмірних змінних:

$$u(v) = \frac{\lambda_t}{c_1 c_v}\frac{1+\nu}{1-\nu}\bar{u}(\bar{v}),\ \ x(y) = \frac{\lambda_t}{c_1 c_v}\bar{x}(\bar{y}), \qquad t = \frac{1}{2\alpha_t a_s^2}\bar{T} + t_c,\ \ \tau = \frac{\lambda_t}{c_1^2 c_v}\bar{t}$$

Отримаємо розв'язок системи (1) для напівнескінченної пластини, для якої граничні умови (x=0) задані як періодичні функції по змінній у.

$$u = U(x,t)\sum_{k=1}^{\infty} a_k cosky\,,\quad v = V(x,t)\sum_{k=1}^{\infty} b_k sinky\,,\quad t = P(x,t)\sum_{k=1}^{\infty} c_k cosky.$$

Після алгебраїчних перетворень в безрозмірних змінних система рівнянь (1) в координатній формі буде мати вигляд:

$$\partial_x^2(E_x - P) = \partial_t^2 E_x + a_s^2 k^2 E_x - (1 - a_s^2)k\partial_x^2 V$$
$$a_s^2\partial_x^2 V = \partial_t^2 V + (1 - a_s^2)kE_x - kP + k^2 V$$
$$\partial_x^2[-\bar{\varepsilon}E_x + (\bar{\varepsilon} + \bar{M}^2)P] = \partial_t^2 P + \bar{\varepsilon}(-a_s^2 k^2 + M^2\partial_t)E_x +$$
$$+\bar{M}^2\big[k^2 + B_1 + \big(1 + \varepsilon + B_q\big)\partial_t\big]P + \bar{\varepsilon}[(1 - a_s^2)k\partial_x^2 + M^2 k\partial_t + k\partial_t^2]V \qquad (2),$$

де

Bi – коефіцієнт Біо, c_q – швидкість поширення теплового потоку.

Приведемо (2) до системи хвильових рівнянь. Застосуємо ортогональні перетворення до системи (2), переписаної в матричному вигляді.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\bar{\varepsilon} & \bar{\varepsilon} + \bar{M}^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_s^2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} a_k E_x \\ b_k P \\ c_k V \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_s^2 k^2 & 0 & -k(1-a_s^2)\partial_x^2 \\ \bar{\varepsilon}(-k^2 a_s^2 + M^2 \partial_t) & \bar{M}^2\left[k^2 + B_1 + (1 + \bar{\varepsilon} + B_q)\partial_t\right] & \bar{\varepsilon}[k(1-a_s^2)\partial_x^2 + kM^2\partial_t + k\partial_t^2] \\ k(1-a_s^2) & -ka_s^2 & k^2 \end{pmatrix}$$

Найдемо власні числа матриці A коефіцієнтів правої частини (2), які будуть завжди дійсні і є швидкостями поширення фронтів термопружних хвиль:

$$a_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[a_s^2\bar{\varepsilon} + \bar{M}^2 + 1 \pm \sqrt{(a_s^2\bar{\varepsilon} - \bar{M}^2 + 1) + 4a_s^2\bar{\varepsilon}\bar{M}^2}\right], \qquad a_3^2 = a_s^2.$$

Звернемо увагу на знайдені швидкості поширення фронтів термопружних хвиль, які природно відрізняються від пружних хвиль, бо залежать вже від інших параметрів. Швидкості фронтів пружних поздовжньої, поперечної і зсувної хвиль є функції від постійних Ляме і щільності:

$$c_1 = f(\lambda, \mu, \rho), \;\; c_2 = f(\mu, \rho), \qquad a_s = f(\lambda, \mu)$$

Швидкості поширення знайдених тут швидкостей поширення фронтів термопружних хвиль, тобто хвиль, що залежать від температури також, є функції таких аргументів:

$$a_1 = f(\varepsilon, M, \bar{\varepsilon}, \bar{M}), \qquad a_2 = f(\varepsilon, M, \bar{\varepsilon}, \bar{M}), \;\; a_3 = a_s = f(\lambda, \mu)$$

До розгляду введемо вектор Y і матрицю U, стовбцями якої є власні вектори матриці A.

$$Y = \begin{pmatrix} f \\ g \\ V \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \alpha_1 = 1 - a_1^2 \\ \alpha_2 = 1 - a_2^2 \end{matrix}$$

Вектори X і Y зв'язані співвідношенням:

$$X = UY$$

Перепишемо систему (2) в матричному вигляді:

$$\partial_x^2 AX = \partial_t^2 X + BX$$

А також виконаємо такі перетворення:

$$\partial_x^2 AUY = \partial_t^2 UY + BUY$$

$$\partial_x^2 U^{-1}AUY = \partial_t^2 U^{-1}UY + U^{-1}BUY$$

$$\partial_x^2 \Lambda Y = \partial_t^2 Y + DY$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_{111} + d_{112}\partial_t & d_{121} + d_{122}\partial_t & d_{131}\partial_x^2 + d_{132}\partial_t + d_{133}\partial_t^2 \\ d_{211} + d_{212}\partial_t & d_{221} + d_{222}\partial_t & d_{231}\partial_x^2 + d_{232}\partial_t + 2\partial_t^2 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

Доданки елементів матриці D знаходяться по формулі $D = U^{-1}BU$.

В розгорнутому вигляді отримане матричне рівняння буде:

$$a_1^2\partial_x^2 f - \partial_t^2 f = d_{111}f + d_{112}\partial_t f + d_{121}g + d_{122}\partial_t g + d_{131}\partial_x^2 V + d_{132}\partial_t V + d_{133}\partial_t^2 V$$
$$a_2^2\partial_x^2 g - \partial_t^2 g = d_{211}f + d_{212}\partial_t f + d_{221}g + d_{222}\partial_t g + d_{231}\partial_x^2 V + d_{232}\partial_t V + d_{233}\partial_t^2 V$$
$$a_3^2\partial_x^2 V - \partial_t^2 V = d_{31}f + d_{32}g + d_{33}V \qquad (3)$$

До отриманих хвильових рівнянь (3) застосуємо метод асимптотико-групового аналізу [2]. Розв'язок системи (3) будемо шукати у вигляді:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i\,, \qquad g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i\,,\ \ V = \sum_{i=1}^{\infty} V_i\,,\ \ i = 1,2,\dots$$

Згідно з методом АГА члени цих рядів задовольняють рекурентним співвідношенням:

$$a_1^2\partial_x^2 f_i - \partial_t^2 f_i = d_{111}f_{i-2} + d_{112}\partial_t f_{i-1} + d_{121}g_{i-2} + d_{122}\partial_t g_{i-1} + d_{131}\partial_x^2 V_{i-1} + \\ + d_{132}\partial_t V_{i-2} + d_{133}\partial_t^2 V_{i-1}$$

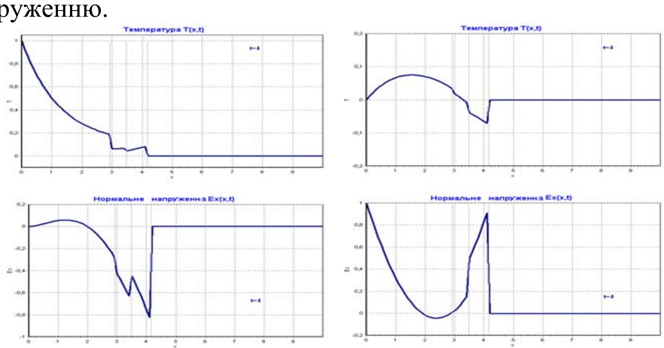
$$a_2^2\partial_x^2 g_i - \partial_t^2 g_i = d_{211}f_{i-2} + d_{212}\partial_t f_{i-1} + d_{221}g_{i-2} + d_{222}\partial_t g_{i-1} + d_{231}\partial_x^2 V_{i-1} + \\ + d_{232}\partial_t V_{i-2} + d_{233}\partial_t^2 V_{i-1}$$

$$a_3^2\partial_x^2 V_i - \partial_t^2 V_i = d_{31}f_{i-1} + d_{32}g_{i-1} + d_{33}V_{i-2}$$

Можна показати, що розв’язок отриманої системи безкінечних рекурентних рівнянь представляється у вигляді рядів по степеням $x^{i-j}(a_m t - x)^{\gamma+i-1}, (\, m = 1,2,3,\ \ j = 1,2,\dots i, i = 1,2,\dots)$. Тому розв’язок рекурентних рівнянь будемо шукати у вигляді сум від добутку деяких функцій від x на базисні величини $(a_1 t - x), (a_2 t - x), (a_3 t - x)$.

Всі коефіцієнти сум знаходяться підстановкою в вихідні рівняння окрім коефіцієнтів $F_{ii}^1,\ G_{ii}^2,\ V_{ii}^3, a_{k,}b_k, c_k, які$ знаходяться із граничних умов. Для їх визначення отримали систему шести алгебраїчних рівнянь і прирівняли коефіцієнти (при i=j, x=0) при однакових степенях t.

Отримані аналітичні розв’язки запрограмовані на ПК, що дозволило побудувати графіки поширення температури і деформації для різних граничних умов: при миттєво прикладеним на границі x=0 температурі і/або напруженню.



Мал.1 – Поширення температурної хвилі і нормального напруження при миттєво прикладеній на границі постійній температурі (зліва) або напруженню (справа).

<u>Висновки</u>. Отримана нова система диференційних рівнянь, що описує динамічну зв’язану задачу термопружності для тонкої однорідної ізотропної пластини.

Вперше застосований метод асимптотико-групового аналізу для розв’язання задач термопружності.

Знайдена аналітична залежність всіх швидкостей поширення термопружних хвиль від теплофізичних параметрів. Проводився також розрахунок і складалася таблиця знайдених конкретних термопружних швидкостей для деяких матеріалів.

Отримані аналітичні і на їх основі графічні розв'язки дозволяють виділити фронти термопружних нестаціонарних хвиль, простежити їх поширення у часі, а також виділити якісно новий ефект – затухання.

1. Подстригач Я.С. Коляно Я.С. – Обобщенная термомеханика – Київ: Наукова думка, 1976, 312 с.
2. Шамровский А.Д. – Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости. Монографія – Запоріжжя: ЗДІА, 1997, 169 с.
3. Швец Р.Н. Взаимосвязанная задача термоупругости для тонкой пластинки // Прикл. механіка – 1965г. – в.3, Т.1, с.107 – 115.

DYNAMIC TASK OF SPREADING THERMOELASTIC WAVES IN HOMOGENEOUS PLATE

In the work it's obtained tied system of differential equations of generalized thermoelasticy for plate. These equations are reduced to a system of wave equations by the methods of linear algebra, and then to a recurrent infinite system by the method of asymptotic group analysis. The solving of the equations lets to allocate fronts of the waves and to find their speeds. It's considered mutual influence of deformation and temperature fields which is interesting in dynamic tasks and this is confirmed in results.