УДК 539.3

СИНГУЛЯРНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОЗДОВЖНЬОЮ ТРІЩИНОЮ ПІД ДІЄЮ ЗМІННОГО В ЧАСІ НАВАНТАЖЕННЯ

Махоркін М.І.

ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України м.Львів, вул. Наукова, 3-б, 79060, mahorkin@ukr.net.

Оболонкові структури різної конфігурації широко використовуються в авіа- та ракетобудуванні, хімічному машинобудуванні, атомній енергетиці промисловому будівництві тощо. Надійність конструкцій та систем, в які вони входять великою мірою залежить від наявності в оболонках гострокінцевих концентраторів напружень типу тріщин. Саме тому значне зацікавлення викликає теоретичне вивчення напружень та деформацій в околі такого роду дефектів чому присвячені численні наукові праці та дослідження. Серед них слід відзначити вивчення оболонок з тріщинами під дією змінного в часі навантаження оскільки визначальні співвідношення ускладнюються порівняно із дослідженнями для статичного навантаження. Такі навантаження часто виникають при експлуатації трубопроводів, у авіатехніці тощо.

Розглянемо замкнену безмежну циліндричну оболонку з наскрізним повздовжнім розрізом, довжина якого – $2l$ (рис. 1). Оберемо початок системи координат посередині розрізу та вважатимемо, що оболонка перебуває під дією поверхневого навантаження, яке змінюється за експоненціальним законом.

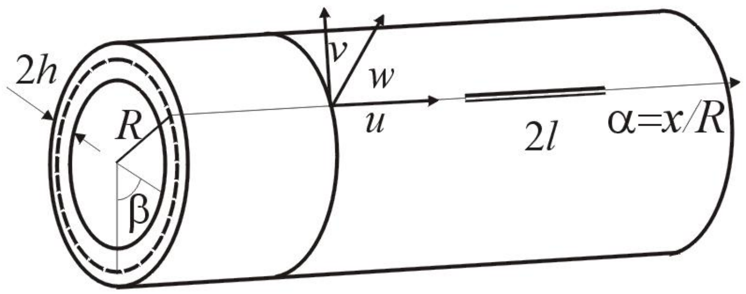

Рис. 1

За вказаних умов поле деформацій вздовж розрізу згідно з [1, 2] матиме такий вигляд:

$$\varepsilon_{\beta\beta}^{0} = \varepsilon_{\beta\beta}^{*} e^{\gamma\tau} = R^{-1}\left[v(\alpha,\tau)\right]\delta(\beta), \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^{0} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{*} e^{\gamma\tau} = R^{-1}\left[u(\alpha,\tau)\right]\delta(\alpha),$$
$$\kappa_{\beta\beta}^{0} = \kappa_{\beta\beta}^{*} e^{\gamma\tau} = -R^{-1}\left\{\left[\theta_\beta(\alpha,\tau)\right]\delta(\beta) - R^{-2}\left[w(\alpha,\tau)\right]\partial_\beta \delta(\beta)\right\}, \tag{1}$$
$$\kappa_{\alpha\beta}^{0} = \kappa_{\alpha\beta}^{*} e^{\gamma\tau} = -R^{-2}\partial_\alpha\left[w(\alpha,\tau)\right]\delta(\beta), \quad \varepsilon_{\alpha\alpha}^{0} = \kappa_{\alpha\alpha}^{0} = 0,$$

де ε_{ij}^{*}, κ_{ij}^{*} $(i, j = \alpha, \beta)$ – частина, що не залежить від часу; $\left[u(\alpha)\right]$, $\left[v(\alpha)\right]$, $\left[w(\alpha)\right]$, $\left[\theta_\beta(\alpha)\right]$ – стрибки переміщень та кутів повороту (див. [1]); τ – час; γ – деякий сталий коефіцієнт розмірності [c^{-1}]; $\partial_j^n = \dfrac{\partial^n}{\partial j^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Система рівнянь рівноваги згідно з [1, 3] матиме вигляд

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w - R^2 c_\tau^{-2}\ddot{g}_k = q_k^{0*} \quad (k = 1, 2, 3), \tag{2}$$

де L_{km} $(m = 1, 2, 3)$ – оператори аналогічні поданим у [1, 2]; $g_1 = u$; $g_2 = v$; $g_3 = w$; q_i^{0*} – праві частини рівнянь, котрі обчислюють за поданнями [1] з урахуванням вигляду поля деформацій (1); $c_\tau^2 = E\rho^{-1}(1-\nu^2)^2$.

Використовуючи операторний метод подамо розв’язок системи диференціальних рівнянь (2) у такому вигляді:

$$u(\alpha,\tau) = u^*(\alpha)e^{\gamma\tau} = R\sum_{j=2}^{3}\left(L_{ju}^{*}\varphi_j + P_{ju}^{*}\psi_j\right)e^{\gamma\tau},$$
$$v(\alpha,\tau) = v^*(\alpha)e^{\gamma\tau} = R\sum_{j=2}^{3}\left(L_{jv}^{*}\varphi_j + P_{jv}^{*}\psi_j\right)e^{\gamma\tau}, \tag{3}$$
$$w(\alpha,\tau) = w^*(\alpha)e^{\gamma\tau} = R\sum_{j=2}^{3}\left(L_{jw}^{*}\varphi_j + P_{jw}^{*}\psi_j\right)e^{\gamma\tau}.$$

Тут $L_{kl}^{*} = L_{kl} + L_{kl}^{**}$, $P_{kl}^{*} = P_{kl} + P_{kl}^{**}$ $(l = u, v, w)$, де L_{kl}, P_{kl} – оператори тотожні поданим у [1] для випадку статичного навантаження, а L_{kl}^{**}, P_{kl}^{**} – оператори які враховують динамічне навантаження і мають такий вигляд:

$$L_{2u}^{**} = \gamma_1^2\left[4\nu\partial_\alpha^3 - 2\nu(1-\nu)^{-2}\left(\partial_\alpha^5 + \partial_\alpha\partial_\beta^4 + 2\partial_\alpha^3\partial_\beta^2 - \partial_\alpha\partial_\beta^3\right) + \right.$$
$$\left. + c_1^{-2}\left(\nu\partial_\alpha^3 - \partial_\alpha\partial_\beta^2\right)\right] - \gamma_1^4 2\nu c_1^{-2}(1-\nu)^{-1}\partial_\alpha,$$

$$L_{3u}^{**} = \gamma_1^2\left[\partial_\beta^3 - \partial_\beta^5 - 2\partial_\alpha^2\partial_\beta^3 - \partial_\alpha^4\partial_\beta + c_1^{-2}\left(\partial_\beta^3 - \partial_\beta - \nu\partial_\alpha^2\partial_\beta\right)\right] - \gamma_1^4 c_1^{-2}\partial_\beta,$$

$$P_{u2}^{**} = -\gamma_1^2(1-\nu)\left[2\nu^2\partial_\alpha^3 + (1+3\nu)\partial_\alpha\partial_\beta^2\right], \quad P_{u3}^{**} = -2\gamma_1^2(1+3\nu)\partial_\alpha^2\partial_\beta,$$

$$L_{2v}^{**}=-\gamma_1^2 2\nu(1-\nu)^{-1}\left[\partial_\beta^5+\partial_\beta^3+2\partial_\alpha^2\partial_\beta^3+\partial_\alpha^4\partial_\beta+(2-\nu)\partial_\alpha^2\partial_\beta-\right.$$
$$\left.-0,5c_1^{-2}(1-\nu)\left(\partial_\beta^3+(2+\nu)\partial_\alpha^2\partial_\beta\right)\right]-\gamma_1^4 2c_1^{-2}(1-\nu)^{-1}\partial_\beta,$$
$$L_{3v}^{**}=\gamma_1^2\left[c_1^{-2}\left(\partial_\alpha^3-\partial_\alpha-\nu\partial_\alpha\partial_\beta^2\right)-\partial_\alpha^2-\partial_\alpha\partial_\beta^4-2\partial_\alpha^3\partial_\beta^2\right]-\gamma_1^4c_1^{-2}\partial_\alpha\,,$$
$$P_{2v}^{**}=-\gamma_1^2(1-\nu)\left[\partial_\alpha^2\partial_\beta-2(1-\nu)^{-1}\partial_\beta-(1+\nu)(1-\nu)^{-1}\partial_\beta^3-\right.$$
$$\left.-c_1^2 2(1-\nu)\partial_\alpha^4\partial_\beta\right]-\gamma_1^4 2(1-\nu)^{-1}\partial_\beta,$$
$$P_{3v}^{**}=\gamma_1^4 4\left[\partial_\alpha^3-\partial_\alpha-2(1+\nu)\partial_\alpha\partial_\beta^2-c_1^2\left(\partial_\alpha^5+\nu\partial_\alpha^3\partial_\beta^2\right)\right]-4\gamma_1^4\partial_\alpha\,,$$
$$L_{2w}^{**}=\gamma_1^4 2c_1^{-2}(1-\nu)^{-1}-\gamma_1^2\left[2(2-\nu)(1-\nu)^{-1}\partial_\alpha^2\partial_\beta^2+c_1^{-2}\left(\partial_\beta^2+(3+2\nu)\partial_\alpha^2\right)\right],$$
$$L_{3w}^{**}=\gamma_1^2\left[\partial_\alpha\partial_\beta^2+(2-\nu)\partial_\alpha^3\partial_\beta-c_1^{-2}(1+\nu)\partial_\alpha\partial_\beta\right].$$
$$P_{2w}^{**}=\gamma_1^2(1-\nu)^{-1}\left[2\partial_\beta^2+(3-\nu)\left(\partial_\beta^4+\nu\partial_\alpha^4+(1+\nu)\partial_\alpha^2\partial_\beta^2\right)\right]-\gamma_1^4 2(1-\nu)\left(\partial_\beta^2+\nu\partial_\alpha^2\right)$$
$$P_{3w}^{**}=\gamma_1^2\left[4\partial_\alpha\partial_\beta^2+2(3-\nu)\left(\partial_\alpha\partial_\beta^3+\partial_\alpha^3\partial_\beta\right)\right]-4\gamma_1^4\partial_\alpha\partial_\beta\,,\ \gamma_1=R^2\gamma^2c_\tau^{-2}\,.$$

Функції φ_j , ψ_j визначають з рівнянь:

$$D\varphi_2=\varepsilon_{22}^*\,,\ D\varphi_3=\varepsilon_{12}^*\,,\ D\psi_2=R\kappa_{22}^*\,,\ D\psi_3=R\kappa_{12}^*\,, \tag{4}$$

де оператор D має вигляд $D=D^0+D^*+D^{**}$.

Тут D^0 і D^* – оператори, вигляд яких збігається із поданим у [1] для випадку статичного навантаження, а D^{**} – оператор, що враховує динамічність навантаження –

$$D^{**}=2\gamma_1^4(1-\nu)^{-1}c_1^{-2}\left\{\left(8-2\nu^2\right)\partial_\alpha^4\partial_\beta^2+c_1^2\left[\left(\partial_\alpha^2+\partial_\beta^2\right)^2-\partial_\beta^2-2\left(1-\nu\right)\partial_\alpha^2\right]\right\}+$$
$$+\gamma_1^2\left\{c_1^{-2}\left[\left(\partial_\alpha^2+\partial_\beta^2\right)^2-\partial_\beta^2-\left(3+2\nu\right)\partial_\alpha^2\right]+2(1-\nu)^{-1}\left[0,5(\nu-3)\left(\partial_\alpha^2+\partial_\beta^2\right)^3-\right.\right.$$
$$\left.-0,5(3+\nu)\partial_\beta^4+2(1-\nu)\left(\partial_\alpha^4-\partial_\beta^2\right)-\left(2-\nu^2\right)\partial_\alpha^2\partial_\beta^2\right]-$$
$$\left.-2c_1^2\left[2(1-\nu)\partial_\alpha^6+\left(1-\nu^2\right)\partial_\alpha^4\partial_\beta^2\right]\right\}+2\gamma_1^6(1-\nu)^{-1}c_1^{-2}$$

Відтак, використавши перетворення Фур'є, з'ясуємо, що функції φ_j , ψ_j описуються виразами поданими в [2], якщо в них формально замінити

$[u]$, $[v]$, $[w]$, $[\theta_\beta]$ на $[u^*]$, $[v^*]$, $[w^*]$, $[\theta_\beta^*]$. Функція $\Phi_n(\alpha,\beta)$, котра входить у ці вирази, обчислюється за такою ж формулою, як і в [1] де слід прийняти $n = 0,1,2,3,...$, а $y_i\left(i=\overline{1,8}\right)$ – корені такого рівняння:

$$y^8 + A_1 y^6 + A_2 y^4 + A_3 y^2 + A_0 = 0\,, \tag{5}$$

$$A_6 = 4n^2 + \gamma_1^2(3-\nu)(1-\nu)\,,$$

$$A_4 = 6n^4 + \left(1-\nu^2\right)c_1^{-2} + 2\gamma_1^4(1-\nu)^{-1} +$$

$$+\gamma_1^2\left[c_1^{-2} + n^2 3(3-\nu)(1-\nu)^{-1} - 2n^2(4-\nu^2)\right],$$

$$A_2 = n^4(n^2-1)^2 + \gamma_1^4\left[c_1^{-2}(3-\nu)(1-\nu)^{-1} + 4n^2(1-\nu)\right] +$$

$$+\gamma_1^2\left[c_1^{-2}(3+2\nu) + n^2 2c_1^{-2} + 3n^4(3-\nu)(1-\nu)^{-1}\right],$$

$$A_0 = n^4\left(n^2-1\right)^2 + \gamma_1^4(1-\nu)^{-1}\left(n^2(3-\nu)c_1^{-2} + 2n^4 + 2c_1^{-2}\right) +$$

$$+2\gamma_1^6 c_1^{-2}(1-\nu)^{-1} + \gamma_1^2 c_1^{-2}\left(n^2+n^4\right).$$

Виконавши дії та перетворення аналогічні до описаних у [1], отримаємо, систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення похідних від стрибка функцій переміщень та кутів повороту. Відзначимо, що загальний вигляд отриманих рівнянь аналогічний до виведених у [1], а їх ядра можна подати у вигляді

$$K_{ij} = K_{ij}^0 + K_{ij}^* + K_{ij}^{**}$$

де K_{ij}^0 – сингулярна частина, тотожна поданій у [1]; $K_{ij}^* + K_{ij}^{**}$ – регулярна частина, у якій складова K_{ij}^{**} враховує динамічність навантаження, їхній вигляд не подаємо через громіздкість.

1. *Кушнір Р.М., Николишин М. М., Осадчук В.А*. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 318 с.
2. *Осадчук В.А*. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. Киев: Наук. Думка, 1985. – 221 с.
3. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.

SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS FOR CYLINDRICAL SHELL WITH A LONGITUDINAL CRACK UNDER TIME-VARYING LOADING

An elastic cylindrical isotropic shell with a longitudinal crack under surface loading, in time according to exponential law, has been considered. A system of singular integral equations has been constructed. The solutions of these equations enable the study of the stress state near the crack tips.