УДК 539.377

ВИКОРИСТАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ В ПОЛЯРНО –СИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧАХ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТЕРМОЧУТЛИВИХ СЕРЕДОВИЩ

Мастикаш Л.В., Махоркін І.М.

ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України, e-mail: maslyuba2010@gmail.com

Нехай пружне ізотропне сферичне тіло радіуса $r = R_2$ з центральною сферичною порожниною радіуса $r = R_1$, фізико-механічні властивості якого, за винятком коефіцієнта Пуассона, залежать від температури, піддано дії відомого температурного поля $t(r,\tau)$ та зовнішньому і внутрішньому тиску величини p_2, p_1 відповідно.

У такому випадку для визначення напружено-деформованого стану тіла, обумовленого температурним полем $t(r,\tau)$, маємо рівняння рівноваги в переміщеннях, співвідношення Дюгамеля-Неймана і крайові умови, які в безрозмірній формі відповідно мають вигляд

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\bar{u}\right)\right]+\frac{1}{G^*\left(t^*\right)}\frac{\partial G^*}{\partial\rho}\left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial\rho}+\frac{2\nu}{1-\nu}\frac{\bar{u}}{\rho}-\Phi^*\right]=\frac{\partial\Phi^*}{\partial\rho}, \qquad (1)$$

$$\sigma_r = G^*\left(t^*\right)\left[(1-\nu)\frac{d\bar{u}}{d\rho}+2\nu\frac{\bar{u}}{\rho}-(1-\nu)\Phi^*\right], \sigma_\varphi = G^*\left(t^*\right)\left[\nu\frac{d\bar{u}}{d\rho}+\frac{\bar{u}}{\rho}-(1-\nu)\Phi^*\right], \qquad (2)$$

$$\sigma_r\big|_{\rho=1} = p_1^*, \sigma_r\big|_{\rho=\rho_2} = p_2^*, \qquad (3)$$

де $\bar{u} = \dfrac{u}{R\alpha_t^{(0)}t_0}$, $\sigma_i = \dfrac{(1-2\nu)\sigma_{ii}}{2G_0\alpha_t^{(0)}t_0}$, $\Phi^* = \dfrac{1+\nu}{1-\nu}\int\limits_0^{t^*}\alpha_t^*(\zeta)d\zeta$, $\alpha_t^*\left(t^*\right)=\dfrac{\alpha_t(t)}{\alpha_t^{(0)}}$, $t^* = \dfrac{t}{t_0}$, $G^*\left(t^*\right)=\dfrac{\mu(t)}{G_0}$; G_0, $\alpha_t^{(0)}$, t_0 – опорний модуль зсуву і опорний температурний коефіцієнт лінійного розширення та опорна температура.

Для розв'язання крайової задачі (1)-(3) залежність $G^*\left(t^*\right)$ в області її визначення із заданою точністю проапроксимуємо виразом вигляду

$$G^*\left(t^*\right)= G_1^* + \sum_{i=1}^{n}\left(G_{i+1}^* - G_i^*\right)S_+\left(t^* - t_i^*\right),\ t_1^* < t_2^* < \ldots < t_n^*, \qquad (4)$$

де $S_+(\varsigma-\varsigma_i)=\{1,\varsigma>\varsigma_i;0,\varsigma\le\varsigma_i\}$ – асиметрична функція Хевісайда.

Тоді оскільки $t^*(\rho,\tau)$ для кожного конкретного випадку визначено, а τ в рівнянні (1) відіграє роль параметра, то в кожен фіксований момент часу $\tau\in[0,\infty]$ воно набуває наступного вигляду

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\overline{u}\right)\right]+\sum_{j=1}^{m_\tau}\frac{G^*_{q_\tau+j+1}-G^*_{q_\tau+j}}{G^*_{q_\tau+j+1}}\sigma\frac{\partial t^*}{\partial\rho}\delta_+\left(t^*-t^*_{q_\tau+j}\right)=\frac{\partial\Phi^*}{\partial\rho}, \qquad (5)$$

де $\sigma=\frac{\partial\overline{u}}{\partial\rho}+\frac{2\nu}{1-\nu}\frac{\overline{u}}{\rho}-\Phi^*$, $\delta_+(\varsigma)=\frac{\partial S_+(\varsigma)}{\partial\varsigma}$, а m_τ і q_τ визначаються із співвідношення

$$\begin{gathered}t^*_{q_\tau}\le\min t^*<t^*_{q_\tau+1}<\ldots<t^*_{q_\tau+m_\tau}<\max t^*<t^*_{q_\tau+m_\tau+1},\\ \min t^*=\min_{\rho\in[1,\rho_2]}t^*(\rho,\tau),\max t^*=\max_{\rho\in[1,\rho_2]}t^*(\rho,\tau).\end{gathered} \qquad (6)$$

Враховуючи, що $t^*(\rho,\tau)$ строго монотонна функція на $\rho\in[1,\rho_2]$, внаслідок чого в кожний фіксований момент часу справедливі співвідношення [1]

$$S_+\left(t^*-t_i^*\right)=S_+\left[sign\left(\frac{\partial t^*}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho_i}(\rho-\rho_i)\right],\delta_+\left(t^*-t_i^*\right)=\left|\frac{\partial t^*}{\partial\rho}\right|_{\rho_i}\delta_+\left[sign\left(\frac{\partial t^*}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho_i}(\rho-\rho_i)\right],$$

рівняння (5) набирає вигляду

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\overline{u}\right)\right]+\sum_{j=1}^{m_\tau}\frac{G^*_{q_\tau+j+1}-G^*_{q_\tau+j}}{G^*_{q_\tau+j+1}}\sigma\big|_{\rho_{q_\tau+j}}sign\left(\frac{\partial t^*}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho_{q_\tau+j}}\times\\ \times\delta_+\left[sign\left(\frac{\partial t^*}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho_{q_\tau+j}}\left(\rho-\rho_{q_\tau+j}\right)\right]=\frac{\partial\Phi^*}{\partial\rho},\end{gathered} \qquad (7)$$

де $\rho_{q_\tau+j}$ - корінь рівняння

$$t^*(\rho,\tau)-t^*_{q_\tau+j}=0 \qquad (8)$$

в момент часу τ.

Інтегруючи рівняння (7), отримуємо

$$\bar{u}(\rho,\tau)=\frac{C\rho}{3}+\frac{1}{\rho^2}\left[H(\rho,\tau)+D\right]-\sum_{j=1}^{m_\tau}\frac{G^*_{q_\tau+j+1}-G^*_{q_\tau+j}}{G^*_{q_\tau+j+1}}\frac{\rho^3-\rho^3_{q_\tau+j}}{3\rho^2}\times$$
$$\times\sigma\Big|_{\rho_{q_\tau+j}}S_+\left[sign\left(\frac{\partial t^*}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho_{q_\tau+j}}\left(\rho-\rho_{q_\tau+j}\right)\right]. \tag{9}$$

Тут $H(\rho,\tau)=\int\limits_0^\rho \xi^2\Phi^*(\xi,\tau)d\xi$, C, D – сталі інтегрування, $\sigma\big|_{\rho_{q_\tau+j}}=CK_1^{(q_\tau+j)}+DK_2^{(q_\tau+j)}+K_3^{(q_\tau+j)}$, а $K_1^{(q_\tau+j)},K_2^{(q_\tau+j)},K_3^{(q_\tau+j)}$ визначаються за рекурентними співвідношеннями виду:

$$K_1^{(q_\tau+j)}=\frac{1-2\nu}{3(1-\nu)}\left[\frac{1+\nu}{1-2\nu}-\sum_{i=1}^{j-1}\frac{G^*_{q_\tau+i+1}-G^*_{q_\tau+i}}{G^*_{q_\tau+i+1}}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}+\frac{2\rho^3_{q_\tau+i}}{\rho^3_{q_\tau+j}}\right)K_1^{(q_\tau+i)}\right].$$

Підставивши (9) у (2), отримуємо вирази для визначення обумовлених температурним полем $t^*(\rho,\tau)$ безрозмірних температурних напружень

$$\sigma_r=\frac{2(1-2\nu)}{3}G^*\left\{\frac{(1+\nu)C}{2(1-2\nu)}-\frac{3}{\rho^3}\left[H(\rho,\tau)+D\right]-\sum_{i=1}^{m_\tau}\frac{G^*_{q_\tau+i+1}-G^*_{q_\tau+i}}{2G^*_{q_\tau+i+1}}\sigma\Big|_{\rho_{q_\tau+i}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}+\frac{2\rho^3_{q_\tau+i}}{\rho^3}\right)S_+\left[sign\left(\frac{\partial t^*}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho_{q_\tau+i}}\left(\rho-\rho_{q_\tau+i}\right)\right]\right\},$$

$$\sigma_\varphi=\sigma_\theta=(1-2\nu)G^*\left\{\frac{(1+\nu)C}{3(1-2\nu)}+\frac{1}{\rho^3}\left[H(\rho,\tau)+D\right]-\Phi^*(\rho,\tau)-\right. \tag{10}$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{m_\tau}\frac{G^*_{q_\tau+i+1}-G^*_{q_\tau+i}}{3G^*_{q_\tau+i+1}}\sigma\Big|_{\rho_{q_\tau+i}}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}-\frac{\rho^3_{q_\tau+i}}{\rho^3}\right)S_+\left[sign\left(\frac{\partial t^*}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho_{q_\tau+i}}\left(\rho-\rho_{q_\tau+i}\right)\right]\right\}.$$

Сталі інтегрування C, D визначаються із граничних умов (3) за формулами

$$C=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}},\quad D=\frac{b_1a_{11}-b_2a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}, \tag{11}$$

де a_{ij} та b_i $(i,j=1,2)$ визначаються за виразами типу

$$a_{11} = \frac{1+\nu}{2(1-2\nu)} - \sum_{i=1}^{m_\tau} \frac{G^*_{q_\tau+i+1} - G^*_{q_\tau+i}}{3G^*_{q_\tau+i+1}} K_1^{(q_\tau+i)}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} + 2\rho^3_{q_\tau+i}\right) S_+\left[-sign\left(\frac{\partial t^*}{\partial \rho}\right)\Bigg|_{\rho_{q_\tau+i}}\right],$$

$$b_1 = \frac{3p_1^*}{2(1-2\nu)G_1} + \sum_{i=1}^{m_\tau} \frac{G^*_{q_\tau+i+1} - G^*_{q_\tau+i}}{3G^*_{q_\tau+i+1}} K_1^{(q_\tau+i)}\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} + 2\rho^3_{q_\tau+i}\right) S_+\left[-sign\left(\frac{\partial t^*}{\partial \rho}\right)\Bigg|_{\rho_{q_\tau+i}}\right].$$

Таким чином, дослідження термопружного стану термочутливого тіла за центральносиметричної термосилової дії зведено до:

- апроксимації температурних залежностей фізико-механічних характеристик кусково-постійними функціями температури (4);
- числового знаходження коренів рівняння (8), за значеннями яких величини напружень обчислюються згідно формул (10).

Дослідження виконано за часткової фінансової підтримки ДФФД України (проект Ф41.2/001)

1 *Коляно Ю.М., Кулик А.Н.* Температурные напряжения от объемных источников. – Киев: Наук. думка, 1983. –288 с.

USING OF THE GENERALIZED FUNCTIONS IN THE POLAR-SYMMETRIC THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR THERMOSENSITIVE MEDIA

The way to analytic-numerical determination of the thermostressed state of isotropic medium which is under centrally symmetric thermomechanical loading is approbated. The approach is based on the use of elements of algebra of generalized functions and approximation of thermal dependences of physical and mechanical properties of material by piecewise-constant functions of temperature