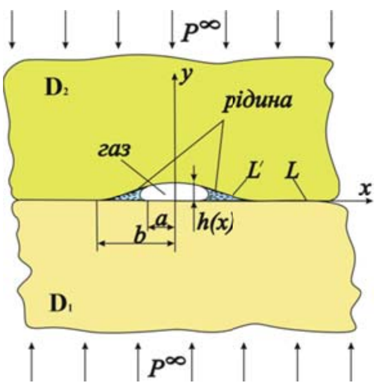
УДК 539.3

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛ З РІДИННИМИ МІСТКАМИ В МІЖКОНТАКТНОМУ ЗАЗОРІ

Козачок О.П.[1], Слободян Б.С.[2]

[1]ЛНУ ім. І.Франка, OlegKozachok@ukr.net,
[2]ІППММ ім. Я.С. Підстригача, labmtd@iapmm.lviv.ua

Розглянемо два пружні півпростори, один з яких має плоску межу. Межа іншого – плоска скрізь, за винятком нескінченної смуги ширини $2c$, де вона має тунельну симетричну поверхневу виїмку, форма якої описується функцією $r(x) = A\left(1 - x^2 / c^2\right)^{5/2}$. Виїмка є мілкою ($A << c$) і пологою ($r'(x) << 1$). Тіла притискаються один до одного зовнішнім тиском на нескінченості $\sigma_{yy} = -P^{\infty}$ та контактують без тертя. Вважаємо, що півпростори перебувають в умовах плоскої деформації. Тому розглянемо взаємодію двох півплощин D_1 і D_2 (рис. 1), утворених перетином тіл площиною, перпендикулярною до твірної виїмки. Внаслідок нерівності межі одного з тіл їх безпосередній механічний контакт неповний і між ними утворюється зазор завдовжки $2b$. На краях міжконтактного зазору зосереджена рідина, яка утворює два симетричні рідинні містки. Вважаємо, що вона нестислива та повністю змочує поверхні тіл. Об’єм рідини V_0 незмінний. У середній частині зазору завдовжки $2a$ між рідинними містками перебуває газ під сталим тиском P_1 ($P_1 = const$). У процесі навантаження змінюється форма зазору, тобто його довжина $2b$, висота $h(x)$ та довжина $2a$ ділянки з газом.



З формули Лапласа [1] випливає такий взаємозв’язок між тиском рідини P_2, тиском газу P_1, поверхневим натягом σ і висотою меніска $h(a)$ в точках його контакту з границею тіл:

$$P_1 - P_2 = \frac{2\sigma}{h(a)}. \qquad (1)$$

Крайові умови контактної задачі мають вигляд

– на ділянках контакту L:

$$\sigma_{yy}^{+} = \sigma_{yy}^{-},\ \tau_{xy}^{+} = \tau_{xy}^{-} = 0, \qquad (2)$$

$$\upsilon^{+} = \upsilon^{-} - r(x),\ |x| \in [b,c],\ \upsilon^{+} = \upsilon^{-},\ |x| > c; \qquad (3)$$

– на ділянці міжконтактного зазору L':

на ділянці дії газу $|x| < a$:

$$\sigma_{yy}^{+} = \sigma_{yy}^{-} = -P_1,\ \tau_{xy}^{+} = \tau_{xy}^{-} = 0, \qquad (4)$$

на ділянці капілярів $a < |x| < b$:

$$\sigma_{yy}^{+} = \sigma_{yy}^{-} = -P_2,\ \tau_{xy}^{+} = \tau_{xy}^{-} = 0; \qquad (5)$$

– на нескінченості:

$$\sigma_{yy} = -P^{\infty},\ \sigma_{xx} = 0,\ \tau_{xy} = 0, \qquad (6)$$

де σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy} – компоненти тензора напружень; υ – складова вектора переміщення уздовж осі Oy; індексами “+”, ”–” позначено граничні значення функції при прямуванні точки до осі Ox у верхній і нижній півплощині ($y \to \pm 0$).

Оскільки рідина нестислива і не може виходити з зазору, то рівняння збереження кількості рідини буде мати вигляд:

$$\int_a^b h(x)dx - \frac{(h(a))^2}{8}\pi = const = \frac{1}{2}V_0. \qquad (7)$$

Тут V_0 – об’єм рідини, що припадає на одиницю довжини зазору в напрямі твірної виїмки.

Подавши розв’язок задачі через висоту зазору $h(x)$ [2] та задовольнивши контактно-крайові умови (2)-(6), отримаємо сингулярне інтегральне рівняння (СІР) відносно функції $h(x)$:

$$\frac{2}{\pi}\int_{L'} \frac{h'(t)}{t-x}dt = \frac{10A}{c^5}\left(-x^4 + \frac{3}{2}x^2c^2 - \frac{3}{8}c^4\right) + K\left(P^{\infty} - P(x)\right),\ x \in (-b;b). \qquad (8)$$

Тут $K = (\kappa_1 + 1)/(2G_1) + (\kappa_2 + 1)/(2G_2)$, $G_k = E_k / (2(1+\nu_k))$, $\kappa_k = 3 - 4\nu_k$, $P(x) = \begin{cases} P_1, & |x| < a \\ P_1 - \dfrac{2\sigma}{h(a)}, & a < |x| < b \end{cases}$, E_k, ν_k – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона відповідно.

Функція $h(x)$ повинна задовольняти умови $h'(-b) = h'(b) = 0$, $h(-b) = h(b) = 0$.

Розв'язавши СІР (8) з урахуванням цих умов, знаходимо висоту міжконтактного зазору $h(x)$:

$$h(x) = \frac{K\sigma}{2\pi h(a)}\left[(x+a)\Gamma(b,x,-a) - (x-a)\Gamma(b,x,a)\right] - \\ -\frac{5A}{c^5}\left(\frac{3b^2}{10} - \frac{c^2}{2} + \frac{x^2}{5}\right)\left(b^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{9}$$

де $\Gamma(b,x,t) = \ln\dfrac{b^2 - tx + \sqrt{(b^2 - x^2)(b^2 - t^2)}}{b^2 - tx - \sqrt{(b^2 - x^2)(b^2 - t^2)}}$ і

$$h(a) = -\frac{1}{2}\frac{5A}{c^5}\left(\frac{3b^2}{10} - \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{5}\right)\left(b^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}} + \\ +\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{5A}{c^5}\left(\frac{3b^2}{10} - \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{5}\right)\right)^2\left(b^2 - a^2\right)^3 + \frac{2Ka\sigma}{\pi}\ln\frac{b}{a}}. \tag{10}$$

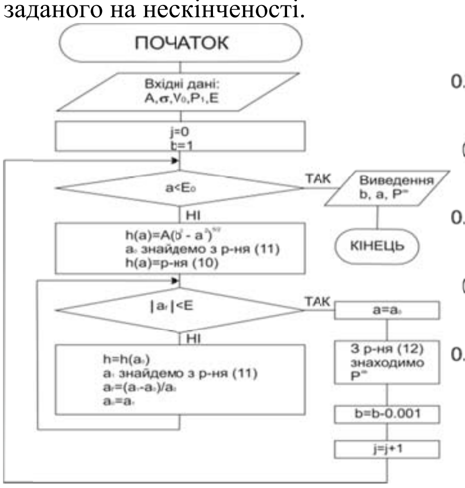
З рівняння збереження кількості рідини (7), врахувавши в ньому залежності (9), (10), та з умови існування обмеженого розв'язку СІР (8) отримаємо систему двох трансцендентних рівнянь для визначення півдовжини ділянки з газом a та півдовжини зазору b:

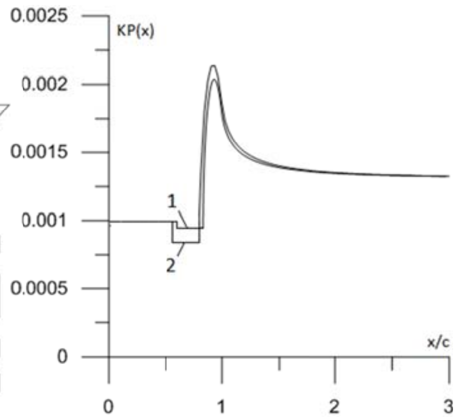
$$\frac{2K\sigma}{\pi h(a)}a^2\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \left(\arcsin\frac{a}{b} - \frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{K\sigma}{\pi h(a)}a\sqrt{b^2 - a^2} + \frac{3}{8}\frac{A}{c^3}b^4\right] + \\ +\frac{A}{c^3}\frac{a\left(b^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{A}{c^3}\frac{3b^2a\sqrt{b^2 - a^2}}{8} + \frac{(h(a))^2}{8}\pi + \frac{1}{2}V_0 = 0 \tag{11}$$

$$\left(KP^\infty - KP_1\right)\pi - \frac{2K\sigma}{h(a)}\left(2\arcsin\frac{a}{b} - \pi\right) - \frac{15A\pi}{4c}\left(\frac{b^2}{c^2} - 1\right)^2 = 0 \tag{12}$$

Для розв'язання цієї системи рівнянь застосовано алгоритм, який базується на методі послідовних наближень. Блок-схема алгоритму зображена на рис. 2.

На рис. 3 зображено розподіл контактного тиску за даних: $V_0 / V = 0{,}1$, $KP_1 = 0{,}001$, $KP^{\infty} = 0.0013$ при різних поверхневих натягах рідини: крива 1 – $K\sigma / c = 1 \cdot 10^{-8}$, крива 2 – $K\sigma / c = 5 \cdot 10^{-8}$. Бачимо, що зі збільшенням поверхневого натягу рідини збільшується контактний тиск. Дві горизонтальні ділянки на графіках відображають розподіл контактного тиску вздовж зазору: перша – на середній його частині, що заповнена газом, друга – на двох крайніх, які заповнені рідиною. Поза зазором контактний тиск зростає до певного максимального значення, а потім спадає до тиску, заданого на нескінченості.





1. *Арцыбашев С.А.* Курс физики. Часть 1. Механика и теплота – Москва: Гос. уч.-пед. изд-во М-ва просвещения РСФСР, 1951. – 672 с.
2. *Мартиняк Р.М.* Контакт півпростору з нерівною основою при заповненому ідеальним газом міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 4. – С. 144–149.

APPLICATION OF METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS TO INVESTIGATION OF ELASTIC INTERACTION OF BODIES WITH LIQUID BRIDGES IN INTERCONTACT GAP

Contact interaction of two elastic half-spaces with gap filled by a gas in its middle part and liquid bridges near gap edges is investigated. The problem is reduced to a singular integral equation for the gap height. Using the iterative procedure, which is based on the method of successive approximations, the contact parameters of the system are analyzed.