УДК 430.43

ВИКОРИСТАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ В УПРАВЛІННІ ПІДПРИЄМСТВАМИ МАЛОГО БІЗНЕСУ

Добуляк Л. П., Цегелик Г. Г.

Львівський національний університет імені Івана Франка
lucanlesia@gmail.com

На практиці часто зустрічаються задачі, в яких треба одночасно оптимізувати декілька критеріїв. Це так звані задачі багатокритеріальної оптимізації [1]. Розв’язання таких задач особливо є важливим у малому бізнесі в процесі планування діяльності малих підприємств в умовах конкурентного середовища. Як звичайно, кожне мале підприємство зацікавлене в максимальному прибутку. Однак, не тільки максимізація прибутку може бути основною метою підприємницької діяльності. Наприклад, для того, щоб діяльність підприємства не була збитковою, дуже важливим є зосередження уваги на випуску продукції, яка користується найбільшим попитом у споживачів. В зв’язку з цим нами побудовано математичну модель задачі планування виробництва з двома критеріями, які повинні одночасно забезпечити максимальний прибуток і максимальний випуск продукції з найбільшим попитом.

Припустимо, що фірма, використовуючи наявні ресурси, має можливість виробляти продукцію декількох видів. Відомо, скільки одиниць кожного ресурсу використовується для виробництва одиниці кожного виду продукції, запас кожного ресурсу, прибуток від реалізації одиниці виробленої продукції кожного виду, а також попит на продукції кожного виду. Задача полягає в наступному: треба так скласти план випуску продукції, щоб максимально використати наявні ресурси і в той же час одночасно забезпечити максимальний прибуток і максимальний випуск продукції з найбільшим попитом. Складемо математичну модель задачі.

Нехай: n - кількість видів продукції, яку може виробляти фірма; m - кількість різних ресурсів, що використовується у виробництві продукції; a_{ij} - кількість одиниць i-го ресурсу, що використовується для виробництва одиниці j-ої продукції; b_i - кількість одиниць i-го ресурсу, яку можна використати у виробництві продукції; c_j - прибуток від реалізації одиниці виробленої продукції j-го виду; p_j - величина попиту на продукції j-го виду; x_j - план виробництва продукції j-го виду (шукані величини).

За наведених позначень математична модель матиме вигляд:

$$L_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$L_2 = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max;$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,2,...,m;$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,...,n.$$

Для розв'язання цієї задачі з двома цільовими функціями і лінійними обмеженнями можна, наприклад, використати метод ідеальної точки [2].

Оскільки умови задачі утворюють опуклу множину M в n-вимірному евклідовому просторі, то, використовуючи симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування, можна окремо знайти максимальні значення цільових функцій L_1 і L_2 на множині допустимих планів (альтернатив) M.

Нехай

$$\max_{x \in M} L_1 = a_1, \ \max_{x \in M} L_2 = a_2,$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Тоді точка $a = (a_1, a_2)$ приймається за ідеальну і згідно методу ідеальної точки знаходиться компромісна альтернатива як розв'язок $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ такої скаляризованої задачі

$$\min_{x \in M} \left(\left| \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - a_1 \right|^2 + \left| \sum_{j=1}^{n} p_j x_j - a_2 \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Наведемо приклад такої задачі та її розв'язування.

Приклад. Методом ідеальної точки розв'язати таку двокритеріальну задачу:

$$f_1 = 2x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$f_2 = 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 16, \\ 5x_1 + x_2 \le 60, \\ x_1 + 5x_2 \le 60; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 .$$

Розв'язування. Множина точок, які задовольняють умови задачі, утворюють опуклий п'ятикутник OABCD (рис. 1).

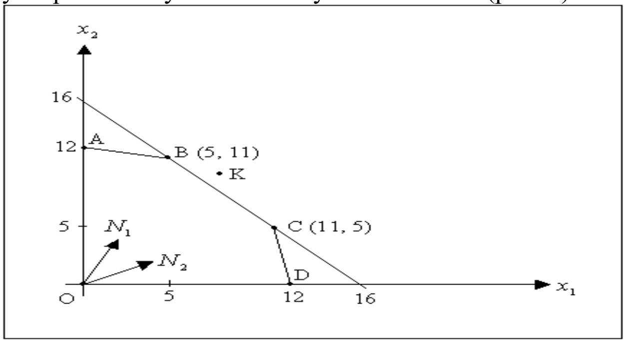

Рис. 1. Множина допустимих розв'язків

Оскільки

$\max f_1 = 54$ в точці $B(5, 11)$, $\max f_2 = 11{,}3$ в точці $C(11, 5)$,

то ідеальною є точка $a = (54; 11{,}3)$. Отримаємо таку скаляризовану задачу:

$$f = (2x_1 + 4x_2 - 54)^2 + (0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 - 11{,}3)^2 \to \min ,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 16, \\ 5x_1 + x_2 \le 60, \\ x_1 + 5x_2 \le 60; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 .$$

Цільова функція f являє собою концентричні еліпси з центром в точці, координати якої задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 54 = 0, \\ 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 - 11{,}3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо

$$x_1 = \frac{91}{11}, \; x_2 = \frac{103}{11} .$$

Отже, точка $K\left(\frac{91}{11}, \frac{103}{11}\right)$ є точкою безумовного мінімуму цільової функції f, вона є центром еліпсів.

Як видно з рис. 1, цільова функція на допустимій множині точок досягає мінімуму в точці відрізка BC. Тому для знаходження компромісного максимуму функцій f_1 і f_2 досить розв'язати таку задачу квадратичного програмування:

$$f = (2x_1 + 4x_2 - 54)^2 + (0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 - 11{,}3)^2 \to \min\,,\ x_1 + x_2 = 16\,.$$

Розв'яжемо цю задачу методом множників Лагранжа. Для цього складемо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (2x_1 + 4x_2 - 54)^2 + (0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 - 11{,}3)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 16)\,.$$

Оскільки

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4(2x_1 + 4x_2 - 54) + 1{,}6(0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 - 11{,}3) + \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 8(2x_1 + 4x_2 - 54) + (0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 - 11{,}3) + \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 16,$$

то для відшукання розв'язку одержуємо таку систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 9{,}28x_1 + 16{,}8x_2 - 234{,}08 + \lambda = 0, \\ 16{,}8x_1 + 32{,}5x_2 - 443{,}3 + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 - 16 = 0. \end{cases}$$

Виключивши λ, одержуємо систему

$$\begin{cases} 7{,}52x_1 + 15{,}7x_2 - 209{,}22 = 0, \\ x_1 + x_2 - 16 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x_1 \approx 5{,}1$; $x_2 \approx 10{,}9$. В цій точці $f_1 = 53{,}8$; $f_2 = 9{,}53$.

Таким чином, фірмі для одночасного досягнення максимального прибутку і максимального випуску продукції з найбільшим попитом доцільно виробляти 5,1 одиниць продукції першого виду і 10,9 одиниць продукції другого виду.

Запропонована оптимізаційна модель дає змогу підприємству-виробнику складати план випуску продукції так, щоб одночасно забезпечити максимальний прибуток та максимальний випуск продукції з найбільшим попитом чи найвищою якістю, що покращить шанси підприємства на виживання серед конкурентів.

1. *Кігель В. Р.* Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці – К.: ЦУЛ, 2003. – 202 с.

2. *Волошин О. Ф.* Моделі та методи прийняття рішень, 2-ге вид., перероб. та доповн. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 336 с.

USING MULTICRITERIAL OPTIMIZATION MODELS IN SMALL BUSINESS MANAGMANT

The article presents a mathematical model of the production planning of the two criteria that must simultaneously ensure maximum profit and maximum output with the greatest demand. To solve this problem using the method recommended ideal point.