УДК 517.958:532.72

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ В ТІЛАХ ПЕРІОДИЧНОЇ СТРУКТУРИ ЗА ЗМІШАНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ

Дмитрук В.А.

Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України,
Національний університет «Львівська політехніка»,
dmytruk15@gmail.com

У даній роботі метод побудови точних аналітичних розв’язків контактно-крайових задач дифузії домішкової речовини у двофазних регулярних структурах з урахуванням конвективного механізму масопереносу в одній з фаз, розроблений для усталених процесів [1], розвиненено для нестаціонарних процесів. Отримано аналітичні вирази для концентрації домішкової речовини та потоків маси через внутрішню поверхню контакту за змішаних граничних умов.

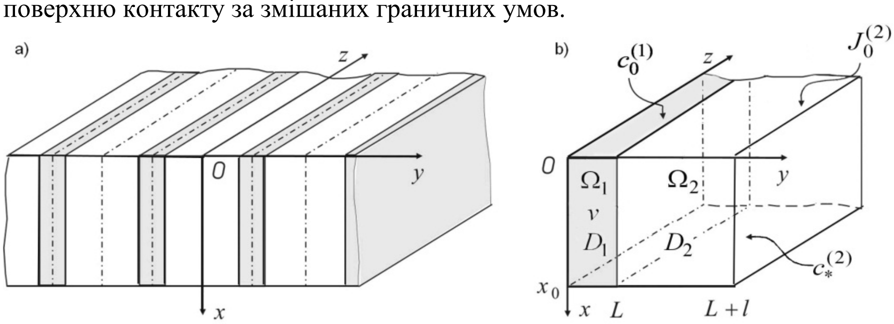

Рис.1. Горизонтально регулярна структура тіла (a) та виділений елемент такої структури (b)

Розглянемо шар товщини x_0, який складається з періодично розташованих областей двох типів. Поверхні, що обмежують ці області, перпендикулярні до поверхонь шару (рис.1a) (вісь Ox перпендикулярна до поверхонь тіла, Oy - до поверхонь складових областей). При цьому області з коефіцієнтом дифузії D_1 мають ширину $2L$, а з коефіцієнтом D_2 - $2l$, крім цього в областях з коефіцієнтом дифузії D_1 масоперенесення відбувається не тільки за дифузійним, а й конвективним механізмом з коефіцієнтом конвективного перенесення v, який приймається відомим і сталим. Така структура має сімейство площин симетрії ($y = \pm n(L+l)$, $n = 0,1,2,...$), які ділять навпіл сусідні контактуючі області. Тому можемо виділити елемент тіла, на вертикальних границях якого потоки в напрямку осі Oy, дорівнюють нулю (рис.1b).

В області $\Omega_1 = [0; x_0] \times [0; L]$ концентрація домішкової речовини $c_1(x, y, t)$ визначається з рівняння

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1 \left[\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} \right] - v \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad x, y \in \Omega_1. \tag{1}$$

В області $\Omega_2 = [0; x_0] \times [L; L+l]$ концентрація частинок домішки $c_2(x, y, t)$ задовольняє рівняння дифузії

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2 \left[\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} \right], \quad x, y \in \Omega_2. \tag{2}$$

На функції концентрації накладені такі крайові умови

$$c_1(x, y, t)\big|_{t=0} = c_2(x, y, t)\big|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

$$c_1(x, y, t)\big|_{x=0} = c_0^{(1)} \equiv \text{const}, \quad \left. \frac{\partial c_2(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\bar{J}_0^{(2)}}{D_2} = J_0^{(2)} \equiv \text{const}; \tag{4}$$

$$c_1(x, y, t)\big|_{x=x_0} = 0, \quad c_2(x, y, t)\big|_{x=x_0} = c_*^{(2)} \equiv \text{const}; \tag{5}$$

$$\left. \frac{\partial c_1(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial c_2(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L+l} = 0. \tag{6}$$

На границі $y = L$ задано умови неідеального масового контакту

$$\mu_1 c_1(x, y, t)\big|_{y=L} = \mu_2 c_2(x, y, t)\big|_{y=L}, \quad D_1 \left. \frac{\partial c_1(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L} = D_2 \left. \frac{\partial c_2(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L}, \tag{7}$$

де μ_i - коефіцієнти концентраційної залежності хімічного потенціалу частинок в областях Ω_1 і Ω_2 відповідно.

Розв’язок контактно-крайової задачі дифузії (1)-(7) шукаємо за допомогою інтегральних перетворень за просторовими змінними окремо в областях Ω_1 і Ω_2. Для того, щоб застосувати перетворення Фур’є необхідно знати величину відповідних функцій або їхніх похідних на границях області перетворення. Оскільки на поверхні контакту величини $\partial c_i / \partial y$ є невідомими, доозначимо їх, враховуючи другу контактну умову (7). Вона означає, що на границі контакту $y = L$ масові потоки рівні між собою і, в свою чергу, дорівнюють деякій функції $g(x,t)$, тобто

$$D_1 \left. \frac{\partial c_1}{\partial y} \right|_{y=L} = D_2 \left. \frac{\partial c_2}{\partial y} \right|_{y=L} = g(x,t) . \qquad (8)$$

За змінною y в області Ω_1 застосуємо скінченне cos-перетворення Фур'є, а в області Ω_2 - cos-перетворення Фур'є зі зсувом [1]. За змінною x в області Ω_1 використаємо інтегральне перетворення для параболічних рівнянь другого порядку з конвективною складовою [2], а в області Ω_2 - таке скінченне інтегральне перетворення [2]

$$\bar{c}_2(m,j,t) = \int_0^{x_0} \tilde{c}_2(x,j,t)\cos(x_m x)dx \,, \quad \tilde{c}_2(x,j,t) = \frac{2}{x_0}\sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_2(m,j,t)\cos(x_m x) \,,$$

де $x_m = (2m-1)\pi/2x_0$.

В отриманих розв'язках залишається невідомою функція $g(x,t)$, яка означена співвідношенням (8). Для її знаходження використана перша контактна умова (7) стрибка функції концентрації на границі розділу фаз. В результаті одержуємо

$$g_n(t') = \frac{\dfrac{\eta_1}{\eta_2} D_1 c_0^{(1)} x_n e^{-D_1(v_D^2 + x_n^2)(t-t')} + \dfrac{D_2}{x_0}\sum_{m=1}^{\infty} x_m B_{n,m} J_m^2 e^{-D_2 x_m^2 (t-t')}}{\dfrac{2}{x_0^2}\sum_{m=1}^{\infty} S_m A_{n,m} B_{n,m} - \dfrac{1}{L}\dfrac{\eta_1}{\eta_2} e^{-D_1\left(v_D^2 + x_n^2\right)(t-t')}\left\{1 - 2S_*\right\}} \,,$$

де $x_n = n\pi/x_0$, $v_D = v/2D_1$, $J_m^2 = J_0^{(2)} + (-1)^m x_m c_*^{(2)}$, $S_* = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-D_1 y_k^2 (t-t')}$,

$$A_{n,m} = \frac{x_n - x_m + (-1)^{n-m} e^{v_D x_0}}{v_D^2 + (x_n - x_m)^2} + \frac{x_n + x_m - (-1)^{n+m} e^{v_D x_0}}{v_D^2 + (x_n + x_m)^2} \,,$$

$$B_{n,m} = \frac{x_n - x_m - (-1)^{n-m} v_D e^{-v_D x_0}}{v_D^2 + (x_n - x_m)^2} + \frac{x_n + x_m + (-1)^{n+m} v_D e^{-v_D x_0}}{v_D^2 + (x_n + x_m)^2} \,.$$

Зауважимо, що $\bar{g}_n(t') = \dfrac{1}{x_0}\sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m}\bar{g}_m(t')$, і для знаходження розв'язку задачі необхідно визначити лише одну з функцій $\bar{g}_n(t')$ і $\bar{g}_m(t')$.

Після обернених перетворень функції концентрації домішкової речовини остаточно запишуться

$$c_1(x,y,t) = c_0^{(1)} e^{v_D x} \frac{\operatorname{sh} v_D(x_0 - x)}{\operatorname{sh}(v_D x_0)} + \frac{2}{x_0} e^{v_D x} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x_n x) \left[-\frac{c_0^{(1)} x_n}{v_D^2 + x_n^2} e^{-D_1\left(v_D^2 + x_n^2\right)t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{L} \int_{k=1}^{\infty} \left\{ \bar{g}_n(t') e^{-D_1\left(v_D^2 + x_n^2\right)(t-t')} \left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(y_k y) e^{-D_1 y_k^2 (t-t')} \right) \right\} dt' \right],$$

$$c_2(x,y,t) = c_*^2 - J_0^{(2)} x_0 \left(1 - \frac{x}{x_0} \right) + \frac{2}{x_0} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(x_m x) e^{-D_2 x_m^2 t} \left\{ 1 - \frac{1}{l} \int_0^t \bar{g}_m(t') e^{D_2 x_m^2 t'} \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cos\left(y_j (y - L)\right) e^{-D_2 y_j^2 (t-t')} \right) dt' \right].$$

Таким чином, за розвиненим методом побудови точних розв’язків контактно-крайових задач конвективної дифузії в регулярних структурах отримано в нестаціонарному випадку вирази для концентрації мігруючих частинок за змішаних крайових умов.

1. *Чернуха О.Ю., Дмитрук В.А.* Математичне моделювання стаціонарних процесів дифузії в регулярних структурах з урахуванням періодичного характеру конвективних явищ // Матер. конф. молодих учених “Підстригачівські читання-2010” (25-26 травня 2010р., Львів) [Електрон. ресурс]. - Режим доступа: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2010/materials/pc2010-01-CD-26.pdf. - 5с.
2. *Мартыненко Н.А., Пустельников Л.М.* Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. – Москва: Наука, 1985. – 304 с.

MATHEMATICAL MODELLING NON-STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION IN SOLIDS OF PERIODICAL STRUCTURE UNDER MIXED BOUNDARY CONDITIONS

For constructing analytical solutions of contact initial-boundary value problems of non-stationary convection-diffusion processes in two-phase regular structures under mixed conditions the method based on application of suitable integral transformations separately in contacting regions is proposed and justified.